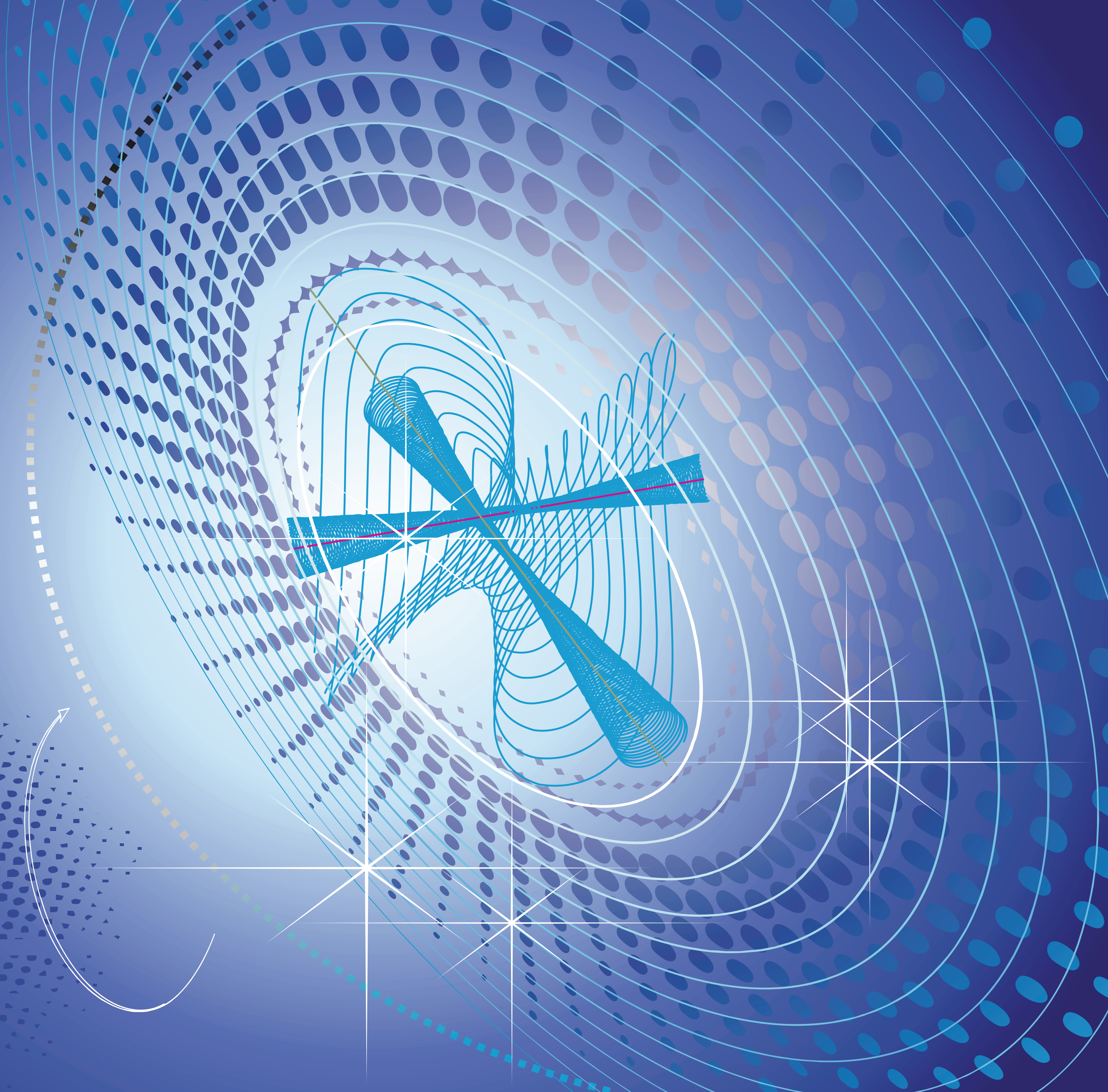
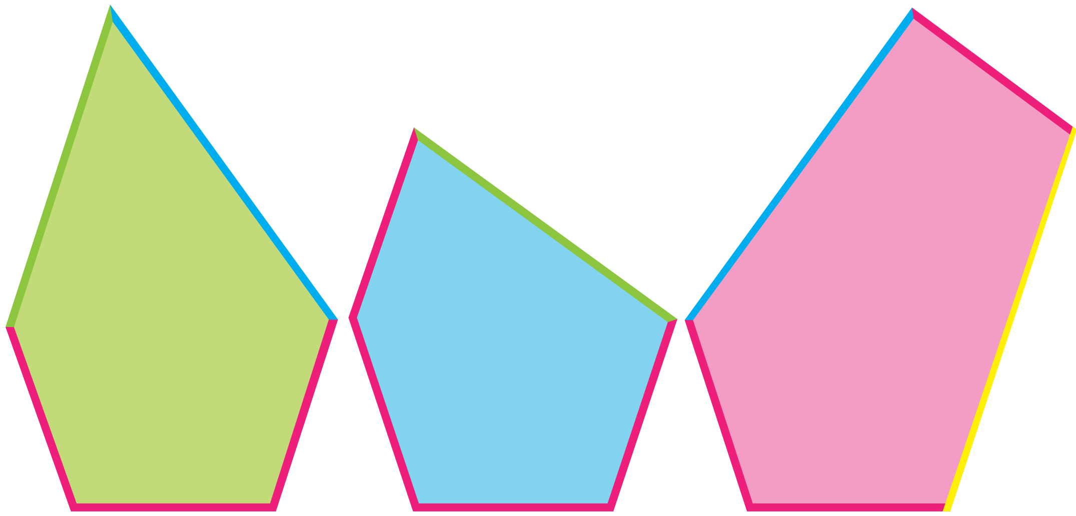
МАЙ / ИЮНЬ

ISSN 0130-2221
2015 • № 3

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ





# ТРИ ПЯТИУГОЛЬНИКА

В этой головоломке, придуманной японцем Коши Араи (Koshi Arai), нужно сложить из трех данных пятиугольников симметричную фигуру. Автор предупреждает, что это можно сделать тремя разными способами. Постарайтесь найти все решения!
Для вашего удобства мы покрасили стороны пятиугольников так, чтобы равные отрезки были одного цвета.

Е.Епифанов

# КВАНТ

МАЙ ИЮНЬ 2015 №3

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА



## В номере:

# Поверхностное натяжение: нанотехнологии и плавающий шарик

***А.КНЯЗЕВ***

*Памяти Константина Юрьевича Богданова*

Трудно сказать, почему тема «Поверхностное натяжение» не входит сегодня в перечень основных вопросов школьной программы по физике. Лет сорок назад ее зачем-то просто исключили из большинства учебников, она ушла и из олимпиадной тематики. Между тем, в нашу жизнь уже прочно вошел термин «нанотехнология», появилась новая модная специальность в университетах, о смысле которой абитуриенты ничего толком сказать не могут. А ведь явление поверхностного натяжения – одна из основ понимания в этой области знаний и технологий. Именно через это явление можно почувствовать, чем маленькие частички вещества отличаются от больших по своим физико-химическим свойствам.

### О силах поверхностного натяжения

Впервые поверхностное натяжение описал венгерский ученый Янош Сегнер еще в XVIII веке. Внешне оно проявляется прежде всего в жидкости, и название этого явления очень удачно отражает его суть. Так, наливая воду в стакан, мы сначала можем заметить прилипание воды к стеклу у краев стакана, затем увидим, как поверхность воды приобретает сглаженную волнистую форму. А потом, когда стакан наполнится до краев, вода не вытекает сразу, а некоторое время удерживается на уровне выше края. Если ничего не знать о молекулах, то, глядя на жидкость, а еще лучше на смолу, можно подумать, что поверхность действительно стянута какой-то пленкой.

Сейчас уже известно, что мельчайшие частички жидкости – молекулы – взаимодействуют друг с другом. Так, начиная с некоторого расстояния они притягиваются друг к другу. Это расстояние как раз то, на котором молекулы находятся в жидкости. Молекулы, пребывающие в глубине жидкости, притягиваются своими соседками со всех сторон одинаково и поэтому находятся в относительном равновесии (рис.1). А молекулы на поверхности ведут себя иначе – у них кроме соседок того же вещества есть и молекулы внешней среды, например молекулы воздуха или другой жидкости (газа). Возникает конфликт сил, и если внутренние молекулы рассматриваемой жидкости перетягивают, то молекулы с поверхности затягиваются внутрь. Оставшиеся на поверхности молекулы смыкаются под действием сил притяжения, и любая выпуклость начинает разглаживаться, натягиваться, площадь поверхности вещества сокращается. Например, если мы начинаем красить что-нибудь кисточкой, то хорошо видно, как неровности краски после кисти прямо на глазах затягиваются и получается гладкая поверхность.

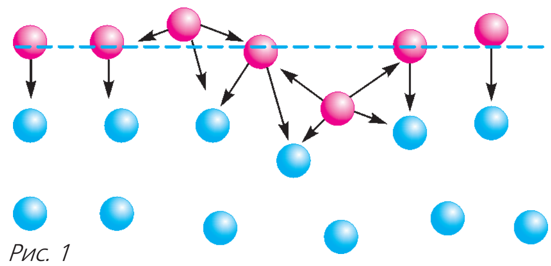


*Рис. 1*

Так возникает представление о силе, действующей вдоль поверхности, подобно силе упругости на резиновой пленке. Если не мешают другие силы, то жидкость стремится приобрести форму, близкую к сфере – из всех тел с заданным объемом сфера имеет наименьшую поверхность. Такую приблизительно форму приобретает падающая капля дождя. Ее идеальности мешают сила тяжести и сила сопротивления среды. Препятствием к достижению идеальной формы могут быть также волнения на поверхности жидкости, которые не видны глазом в дождевой капле, но легко обнаруживаются, например, на поверхности яичного желтка, плавающего в другой жидкости (в частности, в белке яйца).

Такие же по сути рассуждения должны привести нас к выводу о том, что это явление наблюдается не только в жидкостях, но и на поверхности кристаллов. Несмотря на то что молекулы большинства кристаллов взаимодействуют между собой куда сильнее, чем молекулы в большинстве жидкостей, явление поверхностного натяжения проявляется и в них – любой острый скол со временем теряет форму и поверхность кристалла притупляется.

А что получается, если молекулы жидкости – будем придерживаться именно этого примера – соседствуют одновременно и со стенками сосуда, и с воздухом? Здесь основной конфликт сил будет разыгрываться между силами притяжения молекул жидкости друг к другу и силами притяжения их к молекулам сосуда. Может случиться, что молекулы жидкости оказываются «сильнее» молекул твердого тела. И тогда жидкость не растекается – говорят, что твердое тело *не смачивается* жидкостью. В этом случае ее поверхность принимает форму, обращенную внутрь жидкости. Если же силы притяжения к твердому телу окажутся сильнее, будет наблюдаться *смачивание*, и жидкость будет как бы вытягиваться стенками. Так, у краев стеклянного или пластикового стакана вода будет подниматься, и мы будем наблюдать вогнутый мениск, а когда вода будет налита выше края стакана, молекулы твердого тела будут удерживать воду и мениск примет выпуклую форму. Нетрудно убедиться в том, что ртуть в градуснике не смачивает стекло или что масло не смачивается водой. Наверное, каждый видел, как жуки-водомерки могут бегать по поверхности воды. Их лапки не смачиваются, и вода удерживает их, как будто они бегут по водяной пленке. А вот мыльная вода смачивает грязные замасленные руки, и тогда грязь легко смывается с рук. Так мы используем явление поверхностного натяжения на практике.

А вот другие примеры. Муравью трудно напиться из капли росы, потому что его хоботок плохо смачивается водой и ему сложно пролезть внутрь капли – он сначала только сминает каплю, а потом все-таки намокает и пролезает в нее. Почва очень хорошо смачивается водой, поэтому вода впитывается в землю и поднимается из недр почвы на поверхность, а по порам деревьев – на значительные высоты.

Внимательно наблюдая, можно увидеть различные проявления поверхностного натяжения и понять многие ситуации. А проявив некоторую фантазию, можно самим придумать различные примеры и провести опыты. Оказывается, например, что плоская проволочная

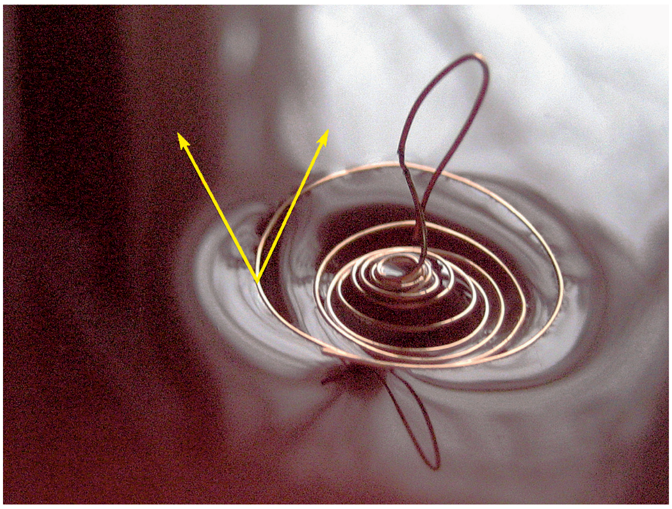


*Рис. 2*

пружинка (рис.2) плавает на поверхности воды и не тонет. Можно сказать, что ее поддерживает упругая поверхность воды, а можно сказать и более строго – силы поверхностного натяжения (они показаны желтым цветом на одном из участков проволочки), действуя по всему периметру несмачиваемой проволочки, уравновешивают ее силу тяжести. Действие силы Архимеда здесь не столь значительно из-за малого объема проволочки, хотя и это может быть учтено при строгом расчете. Однако стоит только прикоснуться к воде кусочком мыла, как пружинка сразу утонет – мыло ослабляет поверхностное натяжение воды. Если в пруд вылить, например, мыльную воду – водомерки потонут.

Такова вкратце суть явления. Для полноты описания нужно было бы расширить понятие строения жидкости некоторыми деталями. Однако эти детали мы будем добавлять лишь по мере надобности, иначе можно запутаться в мелочах. Например, мы не будем обращать внимание на присутствие хаотического теплового движения молекул. Оно, безусловно, есть, и некоторые молекулы даже отрываются от поверхности жидкости – происходит процесс испарения. При повышении температуры это испарение становится заметным настолько, что понятие жидкости теряет смысл – жидкость превращается в газ, т.е. в состояние, при котором взаимодействием молекул между собой можно вообще пренебречь. При таких условиях теряет смысл говорить о поверхностном натяжении – газ занимает весь предоставленный объем и поэтому не имеет собственной формы.

Мы продолжим разговор, считая эти моменты несущественными для наших условий. Наша задача – научиться рассчитывать силы поверхностного натяжения. А для этого нужно знать, как взаимодействуют молекулы. На рисунке 3,*а* изображены силы взаимодействия двух соседних молекул, находящихся на расстоянии $r$ друг от друга. Как видим, этих сил две. Одна из сил – сила притяжения, имеющая электростатическое происхождение. Так взаимодействуют заряды, входящие в состав молекул. Эта сила убывает пропорционально $1/r^7$ и может быть примерно вычислена даже на школьном уровне. Мы же доверимся этому результату и не будем этого делать здесь, поскольку подробные вычисления уведут нас от темы. Скажем только, что коэффициент пропорциональности зависит от зарядов и конфигурации молекулы. Вторая сила – это сила отталкивания, убывающая примерно пропорционально $-1/r^{12}$ . Она имеет электродинамическое происхождение, но вычислить ее можно только по законам квантовой физики, поскольку обычные (классические) представления о движении зарядов в микромире атома оказываются неработающими. В курсе школьной физики сведения о квантовом описании очень скудны, поскольку связаны со сложностью математического аппарата.

Результирующая сила определяется как сумма этих двух сил, и график такого сложения изображен синей линией. Видно, что на определенном расстоянии между молекулами существует точка равновесия сил – к этому расстоянию стремятся молекулы, около него происходит тепловое дрожание молекул. На расстояниях, больших точки равновесия, преобладают силы притяжения, на меньших расстояниях преобладают силы отталкивания.

На упомянутом рисунке 3,*а* красная линия отображает график потенциальной энергии взаимодействия двух

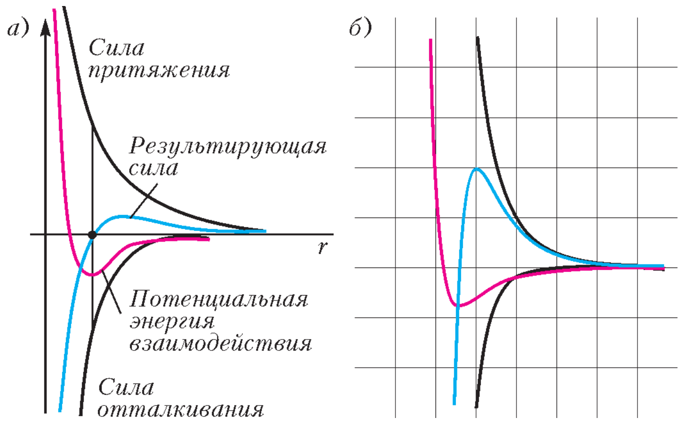


Рис. 3

молекул – минимум потенциальной энергии как раз соответствует точке равновесия. А на рисунке 3,*б* проведено построение тех же графиков сил и энергии на компьютере.

Подчеркнем, что нас интересуют расстояния, на которых действуют именно силы притяжения. Здесь потенциальная энергия отрицательна и определяется в основном электростатическим взаимодействием. Внутри жидкости потенциальную энергию для выделенной молекулы можно оценить как сумму энергий взаимодействия всех граничащих с ней молекул. На поверхности соседей будет почти в два раза меньше, следовательно, результирующая энергия поверхностной молекулы станет почти в два раза больше (не забудем, что энергия взаимодействия здесь отрицательна). В результате поверхностные молекулы становятся активнее внутренних – их дальнейшее поведение направлено на уменьшение своей энергии любым способом: либо уйти в глубину вещества, либо выгодным образом присоединить к себе молекулу чужого вещества.

Чем больше поверхность жидкости, тем больше ее активность. Применяя эти же рассуждения к твердому веществу, скажем: при одном и том же объеме вещество будет активнее при большей доли в нем поверхностных молекул – т.е. при большей степени его размельчения. Так, если вещество раздробить на кубики, содержащие 27 молекул, то оно будет содержать всего одну внутреннюю молекулу и может, например, раствориться всего в одну стадию – достаточно раствориться (вступить в реакцию) верхнему слою из 26-ти активных молекул. Легко посчитать таким же образом, во сколько раз дольше будет растворяться кубик из 1000 молекул. Вот мы и начинаем понимать одну из главных идей нанотехнологии – даже простое измельчение вещества изменяет его активность.

Теперь мы можем записать главную формулу, описывающую явление поверхностного натяжения. Действительно, при отсутствии химических реакций изменение энергии взаимодействия некоторого объема вещества пропорционально изменению числа поверхностных молекул, или, что одно и то же, изменению (уменьшению) поверхности этого вещества. Математически эту мысль можно записать таким соотношением: $\Delta U \sim \Delta S$. Для перехода от пропорциональности к равенству введем числовой коэффициент, отражающий связь между величинами:

$$\Delta U = -\sigma \Delta S .$$

Этот коэффициент $\sigma$ называют коэффициентом поверхностного натяжения. Его вычисление представляет сложную теоретическую задачу, для решения которой необходимы сведения о форме молекул. В практических приложениях его определяют экспериментально, особенно если речь идет о жидкостях. Для некоторых жидкостей его ориентировочное значение можно найти в таблицах. Так, для ртути $\sigma = 470$ мДж/м$^2$ = 470 мН/м; для воды $\sigma = 71$ мН/м; для глицерина $\sigma = 64$ мН/м; для керосина $\sigma = 29$ мН/м.

Воспользовавшись соображениями размерностей, основную формулу можно переписать следующим образом:

$$F = \sigma L ,$$

где $L$ – длина границы жидкости с твердым телом, а $F$ – сила, действующая на этой границе перпендикулярно линии границы на каждом из участков. Здесь просто произведено сокращение ширины изменяемой области в записи для работы потенциальной силы и в выражении уменьшения площади.

Почему в справочниках приводится коэффициент поверхностного натяжения только для жидкостей? В основном потому, что для кристаллов его значение будет зависеть от расположения плоскости скола – раскалывая кристалл по разным направлениям, мы обнажаем разное число молекул или атомов на единицу его поверхности.

Как видим, от силы упругости силу поверхностного натяжения отличает то, что она всегда определяется только свойствами вещества, силами взаимодействия его молекул между собой и не зависит ни от степени растяжения поверхности, ни от площади и толщины слоя жидкости.

## Опыты с шариками

Примеров использования формулы для силы поверхностного натяжения можно найти довольно много. Особенно в старых задачниках. Мы же рассмотрим малоизвестный опыт с плавающими в воде шариками.[1] Опыт состоит в следующем.

Если шарик плавает в стакане с жидкостью, налитой не до самых краев, то он стремится приблизиться и «прилипнуть» к стенке стакана. Если же стакан долить водой выше краев, то шарик тут же уходит от края к центру стакана.

Очевидно, здесь на шарик, кроме силы Архимеда и силы тяжести, действуют еще силы поверхностного

[1] Я увидел этот опыт на сайте моего друга Константина Юрьевича Богданова. Описание, фото и расчеты проделаны мной – *А.К.*

натяжения. Попытаемся выяснить характер их действия. На фотографии, приведенной на рисунке 4, нанесены желтые линии действия сил поверхностного

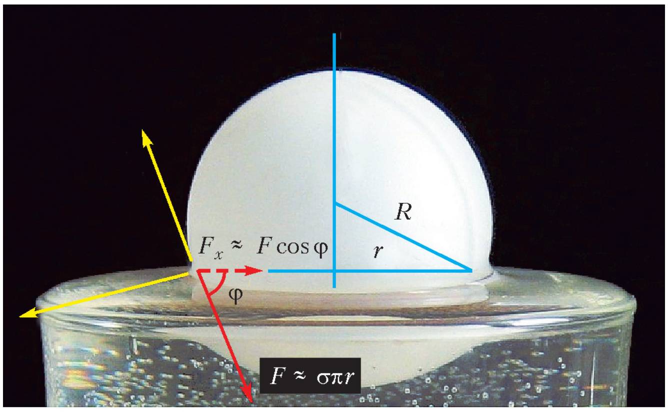



*Рис. 4*

натяжения, по которым поверхность жидкости растягивается: с одной стороны – вдоль жидкости, с другой – вверх по поверхности шарика. Здесь же красным показана сила, действующая уже на шарик, в соответствии с третьим законом Ньютона, и ее горизонтальная составляющая. Значение каждой из этих сил можно оценить так:

$$F \approx \sigma\pi r \sim 72\cdot 10^{-3}\cdot 3\cdot 15\cdot 10^{-3}\ \text{Н} \sim 3\cdot 10^{-3}\ \text{Н},$$

$$F_x \approx 2\sigma\pi r\cos\varphi\ .$$

Такая же сила действует с противоположной стороны шарика, если шарик лежит на ровной поверхности воды. Поэтому он остается в неподвижности.

Если же шарик находится на искривленной поверхности воды, то значение горизонтальных составляющих сил слева и справа различны. В этом случае можно говорить о ненулевом значении результирующей силы. Так, если шарик находится вблизи выпуклого мениска, то его смещение в сторону мениска приводит к уменьшению угла φ между складывающимися силами на величину $\Delta\varphi$ (рис.5). Это приводит к увеличению

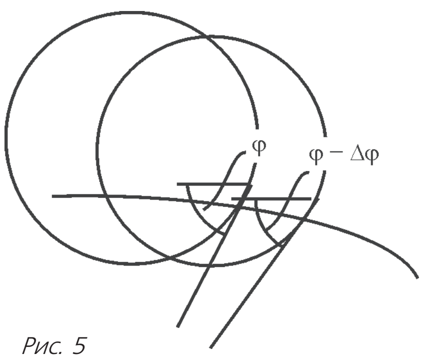



*Рис. 5*

косинусной составляющей справа, в результате чего шарик начинает выталкиваться наверх, в сторону выпуклости мениска. Результирующее значение силы, действующей теперь на шарик, получается как разность сил, действующих с противоположных сторон:

$$F_{\text{р}} \approx 2\sigma\pi r\left(\cos(\varphi-\Delta\varphi)-\cos\varphi\right).$$

Учитывая малость угла $\Delta\varphi$, можно записать, что

$$\cos(\varphi-\Delta\varphi)\approx\cos\varphi+\Delta\varphi\cdot\sin\varphi\ ,$$

и тогда

$$F_{\text{р}} \approx \Delta\varphi\cdot 2\sigma\pi r\sin\varphi\ .$$

В результате значение возвращающей горизонтальной составляющей силы уменьшится примерно на порядок по сравнению с модулем, и теперь ее можно оценить как $10^{-4}-10^{-5}$ Н.

В жидкости столь малое значение действующей силы позволяет шарику двигаться из-за малости силы вязкого сопротивления. Мы не будем здесь отвлекаться на ее расчет. В опыте можно наблюдать, что движение шарика хорошо заметно и что средняя скорость этого движения составляет несколько миллиметров в секунду.

При вогнутом мениске наблюдается обратный эффект – угол между действующими силами увеличивается при приближении к краю, поэтому шарик и подталкивается к краю сосуда.

Интересно, что эффект не зависит от глубины погружения шарика – и в случае глубоко погруженного шарика результат остается тем же.

Можно провести и другой эксперимент, просто насыпав на поверхность воды пенопластовые крошки (рис.6). Как видно, крошки также стремятся к цент-

*Рис. 6*

ру при образовании выпуклого мениска. Однако наше объяснение этого эффекта оказалось не настолько уж очевидным... Но на сайте «Физика вам в помощь»

*Рис. 7*

К.Ю.Богданова мы встретили иную попытку объяснения эффекта с мелкими частицами. Там обсуждалось медленное переливание чая из сосуда с носиком (рис.7). По центру и по краям образовались два встречных течения (стрелки черного цвета). Эти течения можно увидеть по чаинкам, движущимся в них. И вот какое там [1] предлагается объяснение:

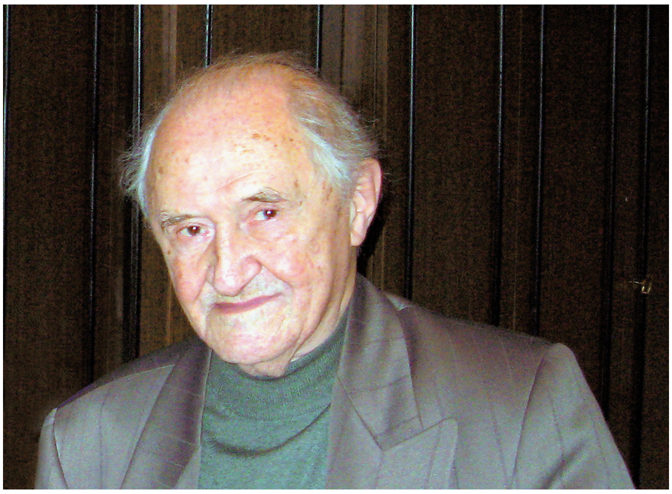
«Довольно легко плывут против течения чаинки чая мате, когда в него наливают чистую воду с небольшой высоты. Причина необычного явления – стремление всей жидкости (мате + струя + вода в верхней чашке) уменьшить свою поверхностную энергию. Поверхностное натяжение мате ниже, чем у чистой воды. Поэтому поверхностно-активные вещества из мате устремляются вверх по струе, увлекая с собой чаинки. По-видимому, то же произойдет, если вместо мате взять мыльный раствор с чаинками».

Значение коэффициента поверхностного натяжения для данного чая не оценивается и не приводится. Между тем, подобное поведение можно наблюдать не только с чаем мате, но и с кофе, и с обычным чаем, и просто с мутной водой. По-видимому, автор обратил внимание на такое поведение именно в этих обстоятельствах.

На наш взгляд, явление можно объяснить, проследив за движением чаинок. Наши стрелки, показывающие движение чаинок (а не воды!), на рисунке 7 выделены красным цветом. Основная причина такая же, что и у описанного нами явления. Действительно, в данном течении можно выделить два взаимно перпендикулярных направления: вдоль течения и поперек него. Поперек течения мениск обусловлен смачиваемостью жидкости, и поэтому чаинки уходят к краям сосуда. В продольном направлении чаинки сносит течение, но мениск у самого края – выпуклый. Чаинки, хотя и сопротивляются течению, но стремятся уйти назад – от выпуклости. Поэтому при аккуратном сливании жидкости и наблюдается обратное течение.

А какое объяснение можете предложить вы, уважаемые читатели?

[1] Адрес: http://www.sciencenews.org/view/generic/id/351383/description Particles_defy_gravity_float_upstream



***Владимир Алексеевич Лешковцев (16.08.1922–25.05.2015)***

25 мая 2015 года ушел из жизни старейший сотрудник нашего журнала Владимир Алексеевич Лешковцев.

Идее создания журнала «Квант» более полувека, однако вышел в свет он лишь после нескольких лет интенсивной подготовки и тщательного подбора редакционной коллегии и сотрудников редакции. Чтобы «Квант» «излучался» регулярно, месяц за месяцем, потребовались не только творческие усилия его авторов и членов редколлегии, но и умение сотрудников редакции обеспечить бесперебойность издательского процесса. Одним из тех, кто с первого номера журнала на протяжении двадцати лет отвечал за его выпуск, был Владимир Алексеевич Лешковцев, штатный заместитель главного редактора.

Трудно сказать, кого Владимир Алексеевич не знал в Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР – учредителях журнала. Его близкие, буквально «на ты» контакты с огромным числом ученых и педагогов очень помогали в решении сложных проблем издания журнала. Однако Владимир Алексеевич занимался не только «текучкой» – его статьи по истории советской физики, рецензии и обзоры научно-популярных книг, связанные с памятными датами передовицы неоднократно появлялись на страницах «Кванта». Коньком же Владимира Алексеевича была рубрика «Уголок филателиста», представившая целую коллекцию марок научно-технической тематики. Нельзя не сказать и о его активной деятельности в качестве одного из лучших лекторов Всесоюзного общества «Знание», сотрудникам «Кванта» выпала удача постоянно убеждаться в его ораторском мастерстве, не сходя с рабочего места.

Те, кого судьба тесно свела с Владимиром Алексеевичем Лешковцевым, не забудут совместную работу, доверительное общение с ним, его уроки мудрости, ценность которых лишь возрастает со временем.

# Об одной «олимпиадной» задаче про графы расстояний

**А.РАЙГОРОДСКИЙ, Л.ШАБАНОВ**

### Одна олимпиадная задача

В 2010 году первый автор этой статьи отвечал за составление варианта для 10 класса на Московской математической олимпиаде. И он предложил следующую задачу как самую сложную в варианте.

**Задача.** *Пусть на плоскости произвольным образом расставлены 4n точек. Если две точки отстоят друг от друга на расстояние 1, то соединим их отрезком длины 1. Проведем все такие отрезки. Предположим, что в любом подмножестве исходного множества, имеющем мощность n + 1, находится хотя бы один отрезок. Докажите, что тогда общее число отрезков в множестве не меньше чем 7n.*

Тогда задачу решила только Даша Анзон, которая сейчас учится на 4-м курсе факультета инноваций и высоких технологий МФТИ. А задача очень примечательная, и связана она с весьма серьезной и в то же время красивой комбинаторной геометрией. В этой статье мы расскажем об ее истоках, решим ее, а главное, обсудим недавние улучшения, которые удалось получить второму автору статьи.

### Что такое графы расстояний?

*Графом (единичных) расстояний* (на плоскости) называется любой граф $G = (V, E)$, у которого множество вершин $V$ – это множество точек на плоскости, а ребра – это все пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние 1. Очевидно, что в нашей олимпиадной задаче речь идет о числе ребер в графах расстояний.

Графы расстояний начали изучаться в 40-е годы XX века. Одним из первых, кто заинтересовался их свойствами, был Пол Эрдеш – выдающийся венгерский математик, автор великого множества задач и статей по комбинаторике, теории графов, теории множеств и теории чисел. А с 1950 года задачи о графах расстояний стали в первую очередь ассоциироваться с одной из самых ярких проблем комбинаторной геометрии – с проблемой Нелсона–Хадвигера о раскраске плоскости. Напомним, в чем состоит задача, и поймем, как она связана с графами расстояний.

Итак, назовем *хроматическим числом плоскости* наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить все точки плоскости, чтобы точки одного цвета не могли отстоять друг от друга на расстояние 1. Иначе говоря, если точки отстоят друг от друга на расстояние 1, то они должны иметь разные цвета. И этих цветов хочется задействовать как можно меньше. Поскольку саму плоскость принято обозначать $\mathbb{R}^2$, ее хроматическое число обозначают $\chi(\mathbb{R}^2)$, при этом греческая буква «хи» также не случайна: она является первой буквой слова «хром» – «цвет».

В принципе о хроматическом числе плоскости есть много хорошей литературы для школьников. Отметим, например, книги [1] и [2], а также статью [3]. Поэтому здесь мы не станем вдаваться в подробности, которые, надо сказать, весьма любопытны. Мы лишь скажем, что сейчас известны неравенства

$$4 \le \chi(\mathbb{R}^2) \le 7,$$

и оба они легко могут быть доказаны школьником! Это, конечно, не может не впечатлять: задаче больше шестидесяти лет, она одна из центральных в своей области, и такой большой разрыв между верхней и нижней оценками.

Где же, однако, связь между задачей о хроматическом числе и задачами о графах расстояний? Что ж, напомним, что *хроматическое число графа* – это минимальное число цветов, в которые можно так покрасить вершины графа, чтобы концы любого ребра имели разные цвета. Хроматическое число графа $G$ обозначается $\chi(G)$. Очень похоже! И точно: если взять на плоскости любой граф расстояний, то, конечно, его хроматическое число не больше хроматического числа всей плоскости, ведь, желая покрасить плоскость, мы не можем не покрасить и каждый граф расстояний на ней. Например, оценка $\chi(\mathbb{R}^2) \ge 4$ получается из рассмотрения замечательного графа, изображенного на рисунке 1 и называемого *Мозеровским веретеном* в честь братьев Л.Мозера и У.Мозера, которые изучили некоторые свойства этого графа. Видно, что этот граф не допускает раскраски в 3 цвета, при которой концы любого ребра имеют разные цвета, отсюда и оценка четверкой. Правда, удивительно, что за столько лет да при наличии компьютеров никто ничего лучшего не нашел? А дело в том, что большинство специалистов верят в гипотезу $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$ и даже говорят иногда о «новой проблеме четырех красок». Как видно, пока что до доказательства гипотезы очень и очень далеко.

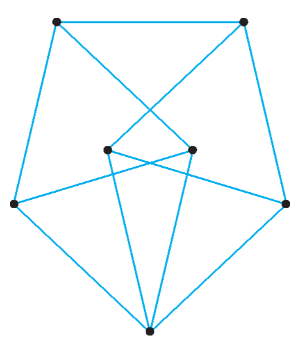


Рис. 1. Мозеровское веретено

По-прежнему не ясно, как связана олимпиадная задача с задачей Нелсона–Хадвигера. Давайте разбираться. Назовем *независимым множеством* вершин графа любое множество его вершин, никакие две из которых не соединены ребрами. Например, в Мозеровском веретене есть независимые множества мощности 1 (любая вершина) и независимые множества мощности 2, но независимых множеств мощности 3 там нет. Среди любых трех вершин есть пара соединенных ребром. Обозначим $\alpha(G)$ максимальную мощность независимого множества в графе $G$, называемую *числом независимости*. Замечая, что каждый цвет в «правильной» покраске вершин графа $G=(V, E)$ (т.е. без ребер с концами одного цвета) является по определению независимым множеством, получаем простую оценку

$$\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}.$$

Скажем, для Мозеровского веретена $\alpha = 2$, откуда $\chi \geq 3{,}5$, а значит, $\chi \geq 4$, и мы имеем альтернативное доказательство нижней оценки хроматического числа плоскости.

Вот теперь все понятно. В новых терминах олимпиадная задача звучит так:

*Пусть у графа расстояний $G$ на плоскости $4n$ вершин и $\alpha(G) \leq n$. Докажите, что тогда число ребер этого графа не меньше чем $7n$.*

Заметим, что граф расстояний в задаче весьма специфичен с точки зрения «новой гипотезы четырех красок». Ведь если еще хотя бы на единицу уменьшить границу для $\alpha(G)$, мы получим $\chi(G) \geq \frac{4n}{n-1} > 4$, откуда $\chi(G) \geq 5$, т.е. такой граф уже даст оценку $\chi(\mathbb{R}^2) \geq 5$, в которую мало кто верит. Существование графов расстояний из задачи – это известная гипотеза Эрдеша, которая тоже пока не доказана, хотя в ее справедливость верят все.

В последующих разделах мы будем постепенно улучшать оценку в олимпиадной задаче.

## Оценка величиной 6*n*

Оценка величиной $6n$ совсем простая. В самом деле, пусть дан граф $G=(V, E)$, у которого $|V| = 4n$, $\alpha(G) \leq n$. Пусть $W$ – одно из самых больших по мощности независимых множеств в $G$. Разумеется, $|W| = \alpha(G) \leq n$. В то же время ясно, что из каждой вершины, которая не принадлежит $W$, т.е. находится в множестве $V \setminus W$, хотя бы одно ребро идет в множество $W$ (иначе оно не было бы максимальным среди независимых). Таких ребер не меньше чем $|V \setminus W| = 3n$.

Выбросим из множества $V$ все вершины множества $W$ и рассмотрим только те ребра графа $G$, которые сохранятся в результате, т.е. те ребра, у которых оба конца принадлежат множеству $V \setminus W$. Получится граф $G_1 = (V \setminus W, E_1)$. Понятно, что $\alpha(G_1) \leq \alpha(G) \leq n$. Как и в начале доказательства, найдем в графе $G_1$ максимальное независимое множество $W_1$. Из каждой вершины графа $G_1$, не принадлежащей $W_1$, в $W_1$ идет хотя бы одно ребро. Это еще, как минимум, $2n$ ребер. Итого уже не меньше $5n$ ребер.

Делаем еще раз аналогичную процедуру и добавляем $n$ ребер, получая, тем самым, заявленную оценку.

Видно, что никакой специфики графа расстояний в приведенном рассуждении использовано не было. Более того, для произвольного графа эта оценка не может быть улучшена. Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$A = \{a_1, \dots, a_n\},\ B = \{b_1, \dots, b_n\},$$

$$C = \{c_1, \dots, c_n\},\ D = \{d_1, \dots, d_n\},$$

$$V = A \cup B \cup C \cup D.$$

Внутри множеств $A$, $B$, $C$, $D$ мы никаких ребер не проводим. А между каждыми двумя множествами проводим только ребра с концами в вершинах с одинаковыми номерами. Так, для $A$ и $B$ проводим ребра $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$, …, $(a_n, b_n)$. Пар множеств у нас 6. Таким образом, всего ребер получается $6n$. И ясно, что число независимости графа равно $n$.

Однако построенный граф, как нетрудно проверить, графом расстояний не является. Значит, надо как-то использовать специфические свойства графов расстояний.

## Оценка величиной 7*n*: решение олимпиадной задачи

Давайте вернемся к началу рассуждения из предыдущего раздела. В нем каждая вершина из множества $V \setminus W$ соединена с хотя бы одной вершиной из множества $W$. Отсюда – вклад $3n$ в итоговое число ребер. Но ведь может же так быть, что некоторые вершины из $V \setminus W$ имеют двух и более соседей в $W$. Докажем, что таких вершин не меньше $n$, и этого хватит для нашей цели, поскольку уже на первом шаге рассуждения мы наберем не $3n$, но $4n$ или более ребер. А остальные два шага проведем так же, как в предыдущем разделе, получая в итоге в аккурат $4n + 2n + n = 7n$ ребер.

Итак, предположим противное: среди вершин из множества $V \setminus W$ не больше $n - 1$ таких, что в $W$ у каждой из них хотя бы два соседа. Тогда, наоборот, в $V \setminus W$ не менее $2n + 1$ вершин имеют ровно по одному соседу в $W$. Для множества этих вершин введем обозначение $V_1$. Значит, $|V_1| \geq 2n+1$. Но в $W$ не больше $n$ вершин. Следовательно, по принципу Дирихле в $W$ есть хотя бы одна вершина $y$, являющаяся единственным соседом сразу для трех вершин $x_1, x_2, x_3 \in V_1$.

Рассмотрим вершины $y, x_1, x_2, x_3$. Может ли не быть ребра между $x_1$ и $x_2$? Нет, не может, ведь если бы его не было, мы могли бы удалить из $W$ вершину $y$ и добавить к нему вершины $x_1$, $x_2$, не теряя независимости (что заведомо невозможно, поскольку $W$ – максимальное независимое множество в графе): ребер-то из $x_1$, $x_2$ в $W$ не останется, так как $y$ была единственным соседом в $W$ для $x_1$, $x_2$, и получится, что множество $W \cup \{x_1, x_2\} \setminus \{y\}$ независимое вопреки максимальности $W$. Стало быть, ребро между $x_1$ и $x_2$ есть.

Аналогично, есть ребро и между $x_2$, $x_3$, и между $x_1$, $x_3$.

Но что же мы видим? Мы видим полный граф на четырех вершинах $x_1$, $x_2$, $x_3$, $y$. Очевидно, однако, что на плоскости нельзя поставить 4 точки с попарными расстояниями 1, хотя мы с самого начала считали, что граф $G$ – это граф расстояний. В итоге получаем противоречие с изначальным предположением о том, что $|V_1| \geq 2n+1$, и этого, как мы помним, достаточно для доказательства оценки $7n$.

Олимпиадная задача решена.

Из нашего рассуждения видно, что от графа расстояний нам понадобилось лишь отсутствие в нем полных графов $K_4$ на четырех вершинах. Но, может быть, можно сделать нечто большее, исходя из этого свойства? Или, как в предыдущем разделе, можно доказать неулучшаемость рассуждения, т.е. в данном случае привести пример графа без $K_4$ с $4n$ вершинами, $7n$ ребрами и числом независимости $n$? В следующем разделе мы обсудим эти вопросы.

### Оценка величиной 8*n*

В этом разделе мы приведем доказательство недавнего результата второго автора заметки, а именно, мы покажем, что у всякого графа, который имеет $4n$ вершин, у которого число независимости не превосходит $n$ и в котором нет $K_4$ в качестве подграфа, не меньше чем $8n$ ребер. Разумеется, из этого будет следовать улучшение оценки в олимпиадной задаче, ведь, как мы помним, в графе расстояний $K_4$ не встречается.

Пусть для начала $n = 1$. Тогда речь идет о графах на четырех вершинах. Правда, $K_4$ у нас запрещен. Значит, в каждом из наших графов должно отсутствовать хотя бы одно ребро графа $K_4$, т.е. число независимости любого такого графа не меньше двух. Но мы-то хотели изучать графы с числом независимости, не большим $n = 1$. Выходит, что при $n = 1$ интересующих нас объектов просто нет.

Пусть теперь $n = 2$. Напомним, что *степень вершины* $A$ графа – это количество ребер, концом которых она служит (обозначение: $\deg A$). Одним из главных инструментов во всех дальнейших рассуждениях будет следующая лемма.

**Лемма.** *Пусть $A$ – вершина минимальной степени в графе $G$, у которого $4n$ вершин, число независимости не превосходит $n$ и в котором нет $K_4$. Если $\deg A \leq 3$, то можно удалить из $G$ четыре вершины со всеми ребрами, удалив не менее восьми ребер и уменьшив число независимости хотя бы на единицу.*

Лемму мы докажем чуть позже, а сейчас вернемся к случаю $n = 2$. Предположим, что существует граф на восьми вершинах с числом независимости не больше двух, без $K_4$ и с хотя бы одной вершиной степени не выше трех. Тогда, по лемме, из этого графа можно удалить 4 вершины, уменьшив число независимости как минимум на единицу. Получится граф на четырех вершинах с числом независимости не больше одного и без $K_4$. Но мы только что поняли, что такого графа не бывает. Значит, наше предположение неверно, т.е. у любого графа на восьми вершинах с числом независимости не больше двух и без $K_4$ все степени вершин не меньше четверки. Из этого, наконец, следует, что число ребер у такого графа не меньше величины $\frac{4 \cdot 4n}{2} = 8n$, т.е. при $n = 2$ оценка $8n$ действительно справедлива.

Оставшаяся часть доказательства, очевидно, проводится индукцией по $n$ с базой $n = 2$. При переходе от $n$ к $n + 1$ мы всякий раз рассматриваем два случая: 1) все степени вершин графа не меньше четверки (и тогда оценка $\frac{4 \cdot 4(n+1)}{2} = 8(n+1)$ у нас в кармане); 2) в графе есть вершина $A$ степени не выше трех (и тогда мы применяем лемму вкупе с предположением индукции, получая в итоге все ту же оценку величиной $8(n+1)$).

Заметим, что при $n = 2$ графы без $K_4$ с числом независимости 2 действительно существуют (рис.2). С одной стороны, граф, изображенный на рисунке 2, свидетельствует о том, что оценку $8n$ улучшить нельзя, если использовать *только* отсутствие $K_4$ в графах расстояний: в нем ровно 16 ребер. С другой стороны, этот граф невозможно изобразить на плоскости как граф расстояний, и это оставляет надежду на дальнейшее усиление оценки в исходной олимпиадной задаче.

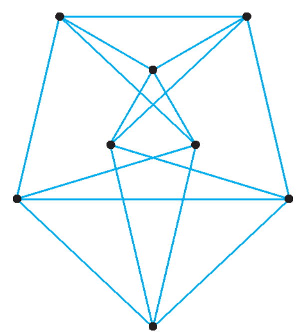


*Рис. 2. Граф на восьми вершинах*

Заметим также, что в графе на рисунке 2 (конечно) все степени вершин равны четырем, и возникает вопрос: «А может, все тривиально, и никакая лемма не нужна? Может, ни при каком $n$ нет графа на $4n$ вершинах с числом независимости не больше $n$, без $K_4$ и с хотя бы одной вершиной степени не выше трех?» Однако уже при $n = 3$ все становится на свои места, и мы имеем граф на рисунке 3, показывающий несостоятельность подобных вопросов.

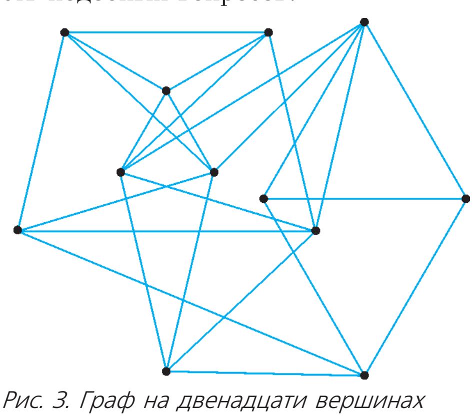


*Рис. 3. Граф на двенадцати вершинах*

Остается, стало быть, доказать лемму. Доказательство опирается на классический факт, называемый теоремой Брукса (доказательство мы не приводим, его можно найти, например, в книге [4]).

**Теорема.** *Пусть $d > 2$ и $G$ – граф, степень каждой вершины которого не превосходит $d$ и в котором нет* *полного подграфа* $K_{d+1}$ *на* $d+1$ *вершине. Тогда* $\chi(G) \le d$.

Итак, пусть в графе $G$ (на $4n$ вершинах, с числом независимости не больше $n$ и без $K_4$) вершина минимальной степени обозначена $A$ и ее степень не больше трех. Рассмотрим по отдельности случаи $\deg A = 0$, $\deg A = 1$, $\deg A = 2$, $\deg A = 3$. Заметим, что, поскольку в $G$ нет $K_4$, для любого подграфа $G'$ графа $G$ (включая сам $G$) верно следствие из теоремы Брукса: *если* $\chi(G') \ge d$, *где* $d$ *– это 4 или 5, то в графе* $G'$ *есть вершина степени не ниже* $d$.

За счет следствия из теоремы Брукса совсем легко получается разобрать случай $\deg A = 0$. Действительно, пусть $\deg A = 0$. Тогда удаление вершины $A$ из графа $G$ уменьшает на единицу число независимости. В новом графе $G'$ всего $4n-1$ вершин и число независимости не больше $n-1$. Тогда

$$\chi(G') \ge \frac{4n-1}{n-1} > 4,$$

откуда следует, что в графе $G'$ есть вершина $B$ со степенью не ниже пяти. Удалим из $G'$ вершину $B$. Останется граф $G''$ с $4n-2$ вершинами и числом независимости не больше $n-1$. Опять $\chi(G'') > 4$, и мы имеем еще одну вершину $C$ степени хотя бы 5. В итоге выходит, что даже удаление трех вершин $A$, $B$, $C$ понижает число независимости и уменьшает количество ребер на 10.

Случай $\deg A = 1$ очень похож на рассмотренный. У вершины $A$ есть ровно один сосед $B$. Удалим из графа $G$ и $A$, и $B$. Получим граф $G'$. Поскольку в нем у вершины $A$ соседей нет, то его число независимости хотя бы на 1 меньше, чем $\alpha(G)$. На данном этапе мы удалили две вершины и одно ребро, уже уменьшив число независимости. У нас есть возможность удалить еще две вершины. Как и раньше,

$$\chi(G') \ge \frac{|V(G')|}{\alpha(G')} \ge \frac{4n-2}{n-1} > 4,$$

и по следствию из теоремы Брукса в $G'$ есть вершина $C$ со степенью не ниже пяти. После ее удаления остается граф $G''$ с $\chi(G'') > 4$, и мы в итоге набираем 4 вершины и, как минимум, 11 ребер. Запас прочности по-прежнему велик!

Пусть теперь $\deg A = 2$. Удалим вершину $A$ вместе со смежными с ней вершинами $B$ и $C$. Число независимости нового графа $G'$ хотя бы на единицу меньше, так как у $A$ в $G'$ соседей нет. При этом мы удалили не менее трех ребер, ведь $A$ имеет минимальную степень в $G$, а стало быть, у $B$ должны быть еще соседи (в худшем случае сосед один, и это $C$). Снова имеем

$$\chi(G') \ge \frac{4n-3}{n-1} > 4,$$

так что в $G'$ есть вершина $D$ степени 5 или выше. Удаляем ее и получаем суммарно в точности 8 удаленных ребер, т.е. все уже на грани.

Пусть, наконец, $\deg A = 3$. Обозначим $B$, $C$, $D$ соседей $A$. Заметим сразу, что степени вершин $B$, $C$, $D$ не меньше трех, ведь у $A$ минимальная степень. Поскольку граф $G$ не содержит $K_4$, без ограничения общности можно считать, что между $B$ и $D$ ребра нет. Легко проверить, что если к тому же нет ребра между $B$ и $C$ или между $C$ и $D$ или если степень хотя бы одной из вершин $B$, $C$, $D$ строго больше трех, то общее количество ребер, исходящих из вершин $A$, $B$, $C$, $D$, не меньше восьми. Достаточно, стало быть, удалить эти четыре вершины, так как у $A$ других соседей нет.

Осталось рассмотреть случай, когда степень каждой из трех вершин $B$, $C$, $D$ в точности равна трем и есть ребра между $B$ и $C$ и между $C$ и $D$. В этом случае у вершины $B$ есть еще один сосед $E$. Удалим из $G$ вершины $A$, $B$, $C$, $E$. Получим граф $G'$, в котором нет соседей $B$ и число независимости которого, тем самым, на единицу меньше чем $\alpha(G)$. При этом пропадет не менее восьми ребер, поскольку у $E$, помимо $B$, есть еще хотя бы два соседа.

Лемма, а вместе с ней и оценка $8n$, полностью доказана.

В этом разделе мы доказали оценку $8n$ исключительно за счет отсутствия $K_4$ в дистанционных графах. При этом мы видели, что на данном пути дальнейших улучшений в задаче не добиться. Однако неужели граф расстояний – это то же, что и граф без $K_4$? Конечно, нет! Например, можно показать, что в графах расстояний не бывает подграфов вида $K_{2,3}$, т.е. графов с двумя долями – одна из двух вершин, другая из трех вершин, – между которыми проведены все 6 ребер. За счет этого второй автор статьи умеет доказывать оценку $\frac{25n}{3}$, а скорее всего, даже $9n$. Но это уже значительно сложнее, и мы не станем загромождать эту статью трудоемкими выкладками. Тем не менее, вопрос остается: как же все-таки выглядит неулучшаемая оценка в «олимпиадной» задаче?!

**Список литературы**

1. *А.М.Райгородский*. Хроматические числа. (МЦНМО, 2014)

2. *A.Soifer*. The Mathematical Coloring Book. (Springer, 2009)

3. *А.М.Райгородский, О.И.Рубанов, В.А.Кошелев*. Хроматические числа. «Квант» №3 за 2008 год.

4. *Д.В.Карпов*. Теория графов. (http://logic.pdmi.ras.ru/~dvk/graphs_dk.pdf)

# Великая и ужасная ядерная энергия

А.ВАРЛАМОВ, Ж.ВИЛЛЕН, А.РИГАМОНТИ

*Ваше мнение, профессор Рейнберг?*

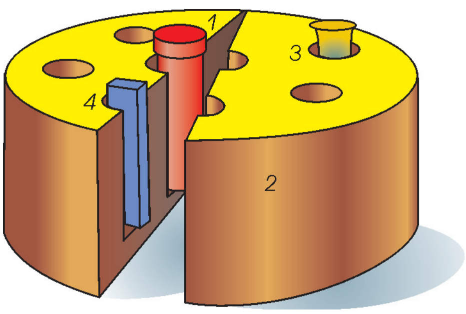
*Низенький, опрятный старичок — бородка клинышком, длинные седые усы — легко приподнялся, круто повернулся к Тоффелю, потом к председателю и горохом рассыпал слова:*

*— Прежде всего я должен отметить одно печальное недоразумение. Здесь говорилось о добывании внутренней энергии при расщеплении атомного ядра. Когда о подобных вещах пишут романисты-фантасты, это еще допустимо, но когда с идеей добычи неисчерпаемой внутриатомной энергии выступает ученый, я, как энергетик, протестую. Это чрезвычайно глубокая, печальная и даже пагубная ошибка. При расщеплении атомного ядра никакой внутренней энергии мы не будем иметь, пока существует и не опровергнут второй закон термодинамики.*

А.Беляев. Чудесное око

Однажды великого английского физика Эрнеста Резерфорда, основоположника ядерной физики, спросили, какой практический интерес могут иметь его открытия в области радиоактивности. Ученый, равно как и герой фантаста Александра Беляева, ответил, что ровно никакого. В то время (в самом начале двадцатого века) действительно невозможно было даже вообразить возможность использования на практике внутриядерных процессов и явлений. Сегодня же каждый представляет, какое значение в жизни человечества имеет атомная энергетика.

Важнейшую роль в практическом использования атомной энергии сыграла способность некоторых тяжелых ядер к делению. В 1938 году было обнаружено, что при бомбардировке ядер урана нейтронами образуются ядра-осколки более легких элементов. Причем этот процесс всегда сопровождается испусканием нескольких новых нейтронов.




*Модель экспериментальной установки, с помощью которой было осуществлено открытие деления тяжелых ядер: 1 — источник нейтронов; 2 — парафиновый блок для замедления нейтронов; 3 — облучаемый препарат (раствор соли урана); 4 — металлическая мишень*

Почему же ядра могут делиться? Первую теорию деления ядер создали в 1939 году физики-теоретики датчанин Нильс Бор и американец Джон Уилер и независимо от них советский физик-теоретик Яков Ильич Френкель. Данное ими объяснение основывалось на капельной модели атомного ядра. Согласно этой модели ядро, представляющее собой сгусток нуклонов, ведет себя подобно капле электрически заряженной жидкости. Попробуем разобраться в этом. И прежде всего выясним, от чего и как зависит энергия связи ядра — энергия, которую необходимо затратить для разделения ядра на составляющие его нуклоны.

Ядерные силы, притягивающие нуклоны друг к другу, проявляются лишь на очень малых расстояниях порядка $10^{-15}$ м, поэтому каждый нуклон взаимодействует практически только со своими ближайшими соседями, а не со всеми имеющимися в ядре нуклонами. Так же обстоят дела и в обычной капле — поскольку силы межмолекулярного притяжения действуют на расстояниях, не превышающих расстояния между молекулами, то приходится считаться лишь с взаимодействием ближайших соседей. А число соседей у каждого нуклона можно считать постоянным. Таким образом, вклад в энергию связи, обусловленный ядерными силами, оказывается пропорциональным числу нуклонов в ядре, т.е. массовому числу:

$$E_{\text{я}} \sim A\,.$$

Однако у нуклонов на поверхности «ядерной капли» соседей меньше, чем внутри ядра, поэтому в энергию связи они дают несколько меньший вклад, чем мы им уже приписали. Это можно учесть, вычтя из $E_{\text{я}}$ поверхностную энергию $E_{\text{пов}}$, пропорциональную числу нуклонов на поверхности ядра, а следовательно, и площади его поверхности:

$$E_{\text{пов}} \sim S_{\text{пов}} \sim R_{\text{я}}^2 \sim A^{2/3}$$

(здесь мы воспользовались тем, что, как показывает опыт, радиусы ядер довольно точно пропорциональны кубическому корню из массового числа). Как видим, и тут имеется полная аналогия с каплей обычной жидкости — молекулы, находящиеся на поверхности, стремятся уйти вглубь и создают силы поверхностного натяжения, с которыми связана поверхностная энергия жидкости.

Чтобы получить окончательное выражение для энергии связи ядра, нам осталось учесть, что часть нуклонов, а именно протоны, заряжены. А это означает, что помимо ядерного притяжения к ближайшим соседям они испытывают еще действие сил обычного электростатического отталкивания, подчиняющегося закону Кулона. Взаимное отталкивание протонов стремится разорвать ядро и, таким образом, уменьшает его энергию связи. В отличие от ядерных, кулоновские силы дальнодействующие — каждый протон взаимодействует со всеми протонами этого ядра. Энергия взаимодействия двух протонов $\sim e^2/R_{\text{я}}$. Если в ядре имеется $Z$ протонов, то каждый из них взаимодействует с $(Z-1)$ остальными и число взаимодействующих пар равно $Z(Z-1)/2$ (для больших $Z$ можно считать, что это число пропорционально $Z^2$). Таким образом, энергия электростатического отталкивания протонов в ядре

$$E_{\text{эл}} \sim \frac{Z^2e^2}{R_{\text{я}}} \sim \frac{Z^2e^2}{A^{1/3}}\,.$$

Итак, для энергии связи ядра получаем

$$E_{\text{св}} = E_{\text{я}} - E_{\text{пов}} - E_{\text{эл}} = \alpha A - \beta A^{2/3} - \frac{\gamma Z^2}{A^{1/3}}\,,$$

где α, β и γ — некоторые постоянные. Эта формула неплохо описывает экспериментальную кривую зависимости удельной энергии связи от массового числа, хотя мы и оставили вне нашего рассмотрения несколько других, менее значимых, вкладов в эту энергию. Эта кривая наглядно показывает, что сначала с ростом массового числа $A$ энергия связи быстро растет. Где-то в средней части таблицы Менделеева она достигает максимума, а затем начинает медленно уменьшаться.

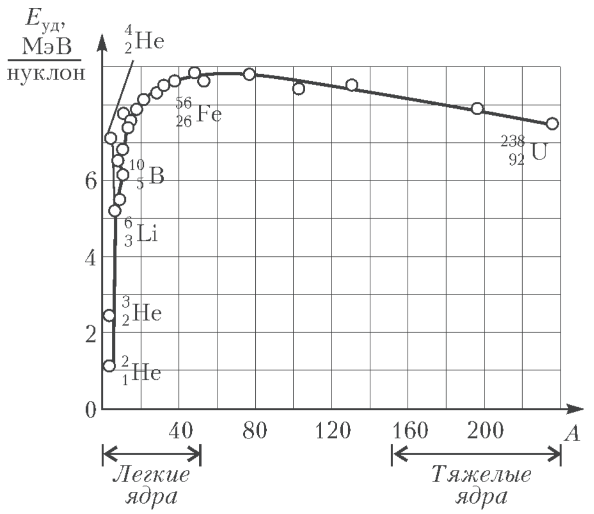
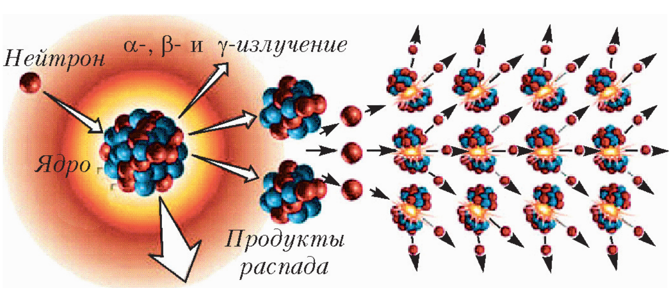



*График зависимости удельной (в расчете на один нуклон) энергии связи от массового числа*

Рассмотрим теперь процесс деления ядра. Пусть ядерная «капля», поглотив попавший в нее извне нейтрон, начинает колебаться и в какой-то момент вытягивается. Минимальную поверхность при заданном объеме имеет сферическая капля. У вытянутой капли поверхностная энергия увеличивается, а энергия связи ядра соответственно уменьшается. С другой стороны, при растяжении ядра возрастает среднее расстояние между нуклонами, и энергия их электростатического отталкивания уменьшается, в результате чего энергия связи должна увеличиться. Если в этой борьбе победит электростатическое взаимодействие, ядро разорвется; если же поверхностное натяжение — ядро вернется в исходное состояние.




*Деление тяжелого ядра в результате бомбардировки его нейтроном*

Из полученного выражения для $E_{св}$ понятно, что судьба ядра во многом зависит от числа протонов $Z$ и общего числа нуклонов $A$. С ростом порядкового номера элемента энергия электростатического отталкивания возрастает быстрее поверхностной энергии, поэтому делиться могут только тяжелые ядра. Причем деление тяжелых ядер может быть как спонтанным, так и под воздействием бомбардировки нейтронами. Спонтанные деления за время существования Земли привели к тому, что в природе не осталось трансурановых элементов, теперь их можно получать только искусственно. А вот в процессе деления ядра в результате бомбардировки его нейтроном всегда испускается еще несколько нейтронов (для урана обычно 2–3). Эти нейтроны, в свою очередь, могут вызвать дальнейшие деления ядер, появится еще больше свободных нейтронов и так далее – произойдет нарастающая цепная реакция. Именно реализация на практике такой цепной ядерной реакции деления, сопровождающейся выделением огромного количества тепловой энергии, и опровергла пессимистическое предсказание Резерфорда.

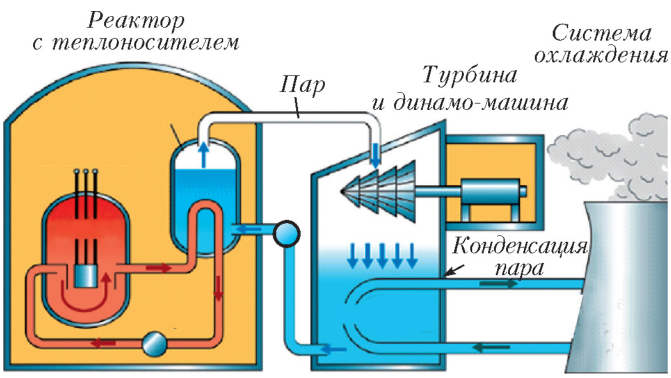
Однако этот самоподдерживающийся процесс происходит только в том случае, если масса уранового образца превышает некоторую «критическую» величину. Действительно, если масса выбранного образца невелика, то у каждого излучаемого при расщеплении ядра нейтрона, прежде чем столкнуться с другим ядром и вызвать новое деление, высока вероятность выйти из его объема. Если же масса образца превышает критическую величину, то цепная реакция «разгоняется»: в единицу времени происходит все большее и большее число делений ядер, которые приводят ко все большему и большему выделению тепла. При отсутствии контроля тепловыделения вскоре неизбежно происходит взрыв.

Оценка критической массы урана-235, необходимой для возникновения цепной реакции, стала важнейшей задачей для физиков по обе стороны фронта во время Второй мировой войны. Кажется, немцы, в том числе и великий Вернер Гейзенберг, эту величину сильно завысили – получающаяся бомба им казалась слишком тяжелой, чтобы быть доставленной к цели самолетом. Возможно поэтому их атомный проект оказался лишь одним из нескольких направлений создания «чудесного оружия» (wunder waffe).

По другую сторону Ла-Манша физик немецкого происхождения Рудольф Пайерлс, эмигрировавший из Германии в Великобританию с приходом к власти Гитлера в 1933 году, в своей оценке величины критической массы пришел к гораздо более оптимистичным выводам. Он даже опубликовал свои расчеты, однако без указания возможности военного применения этих результатов. Последнее, при чтении работы Пайерлса, пришло в голову Отто Фришу, австрийскому физику, который также эмигрировал в Великобританию. В 1940 году Фриш и Пайерлс написали меморандум, на этот раз строго конфиденциальный, который был представлен британским властям. В этом документе авторы описали основные этапы процесса создания атомной бомбы и оценили ее разрушительную силу.

Вскоре союзники всерьез взялись за дело, и была разработана грандиозная программа ядерных исследований – Манхэттенский проект. Он стартовал в США в 1942 году и был реализован в течение трех лет в результате усилий большого коллектива ученых, среди которых, кроме Фриша и Пайерлса, были такие выдающиеся умы, как Энрико Ферми, Роберт Оппенгеймер, Ричард Фейнман и многие другие. Взрывом двух атомных бомб в Хиросиме и Нагасаки в августе 1945 года была завершена Вторая мировая война и начата атомная эра в истории человечества.

В настоящее время деление ядер находит свое мирное применение в энергетике многих стран. Преобразование ядерной энергии в уже легко используемую электрическую энергию происходит, как правило, следующим образом. В реакторе ядерное топливо, обычно уран, при бомбардировке нейтронами распадается на ядра более легких элементов таблицы Менделеева. При каждом акте такого деления выделяется значительная энергия – и в этом суть процесса.




*Превращения энергии в ядерном реакторе*

Если сравнить энергию, выделяемую при делении ядер урана, с энергией, получаемой при сгорании нефти, то один грамм урана заменяет более тонны нефти.

В ядерном реакторе тепло, выделяемое при расщеплении ядер урана, передается протекающей по трубам вокруг реактора жидкости – так называемому теплоносителю. В свою очередь, теплоноситель передает энергию воде, которая превращается в пар. А пар уже вращает турбину – тут все происходит, как в паровозе. И, наконец, механическая энергия турбины преобразуется в электроэнергию с помощью динамо-машины. Полученная электроэнергия по высоковольтным линиям передач поставляется пользователям за сотни километров от атомной электростанции.

Важно, что не все изотопы урана способны расщепляться в реакторе, таким свойством обладает лишь изотоп $^{235}\mathrm{U}$. Его доля в добываемой на рудниках урановой руде составляет всего лишь 0,71%. Наиболее распространенным в природе изотопом является $^{238}\mathrm{U}$, однако он в условиях, реализуемых в реакторах, не расщепляется. Поэтому для использования в ядерной энергетике природный уран должен быть «обогащен»: на специальных фабриках с помощью центрифугирования из него выделяется необходимый изотоп $^{235}\mathrm{U}$. Для работы современного реактора достаточно иметь уран с обогащением 2,5%.

При проектировании и эксплуатации ядерных реакторов огромную роль играет проблема их безопасности. Как уже говорилось, тепло в реакторе выделяется при распаде ядра урана-235 на два ядра более легких элементов. Это деление происходит при бомбардировке ядерного топлива нейтронами и сопровождается испусканием нескольких дополнительных нейтронов, благодаря которым происходят дальнейшие деления ядер: идет цепная реакция. При этом важно не допустить разгона цепной реакции, малейшая ошибка – и реактор превратится в … атомную бомбу!

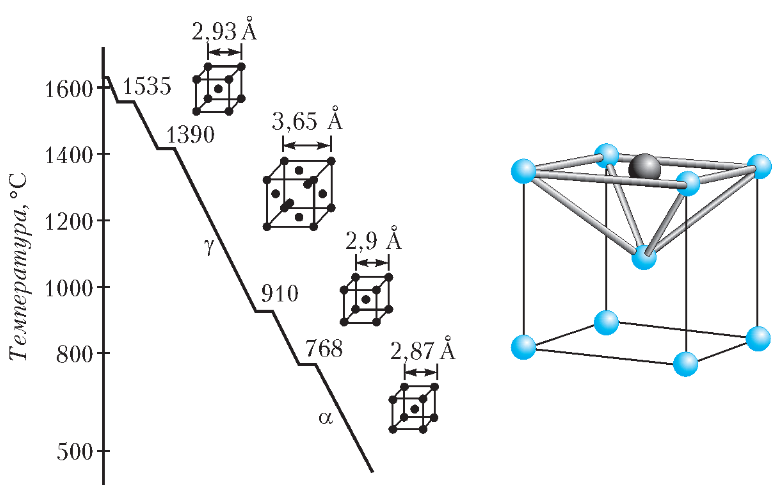
Для управления процессом ядерного деления в реактор вводят регулирующие стержни, изготовленные из материала, эффективно поглощающего нейтроны (это могут быть материалы на основе кадмия, карбида бора, серебра или индия). Некоторые из этих стержней подвешиваются над топливом, чтобы быть готовыми упасть в соответствующие цилиндрические отверстия и остановить разгоняющуюся цепную реакцию. Именно с такой вышедшей из-под контроля цепной реакцией была связана катастрофа, произошедшая в апреле 1986 года из-за серии грубых ошибок в управлении реактором на Чернобыльской АЭС. В результате реактор был разрушен, и радиактивные вещества распространились по огромной территории. В 2011 году, в связи с цунами, катастрофа случилась на АЭС в Фукусиме (Япония). Однако здесь цепная реакция была вовремя остановлена защитными устройствами. Ущерб оказался огромным, однако несоизмеримым с Чернобылем и «атомными грибами» Хиросимы и Нагасаки.

# ПРОГУЛКИ С ФИЗИКОЙ

## Как закаляется сталь?

*(Начало см. на 4-й странице обложки)*

…Как известно, сталь представляет собой сплав железа с углеродом (до 2%). Чтобы сделать сталь более твердой, надо в кристаллическую решетку железа добавить еще некоторое количество атомов углерода. Однако при низкой температуре железо не пускает углерод внутрь своей решетки. Поэтому сталь нагревают до температуры выше 760 °С – тогда кристаллическая решетка изменяется (см. левую часть рисунка) и на место одного из атомов железа становится углерод (см. правую часть рисунка; черный шар это углерод). Но диффузия атомов углерода при такой высокой температуре происходит очень активно, и при обычном охлаждении стали атомы углерода успевают выскочить из решетки. Чтобы этого не произошло, сталь охлаждают очень БЫСТРО, и атомы углерода остаются «за железной решеткой».




Если надо сделать сталь менее твердой и пригодной для обработки, ее «отпускают», т.е. сначала нагревают, а потом МЕДЛЕННО охлаждают, выталкивая при этом атомы углерода из железной решетки.

*К.Богданов*

# Задачи по математике и физике

***Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.***

***Решения задач из этого номера следует отправлять по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3–2015» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М2381» или «Ф2388». В графе «От кого» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений). Решения задач по математике и физике можно присылать также по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно.***

***Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).***

***В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.***

***Задача М2384 предлагалась на VII Международной олимпиаде Romanian Masters of Mathematics, задача М2388 – на XI Олимпиаде имени И.Ф.Шарыгина.***

## Задачи М2381–М2388, Ф2388–Ф2394

**М2381.** В компании из 25 человек каждый знаком ровно с четырьмя другими. Оказалось, что тройку попарно знакомых людей можно выбрать $k$ способами. Найдите наибольшее возможное значение $k$.

*П.Кожевников*

**М2382.** Дано натуральное число $n$. Бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ такова, что для любого натурального $k$ число $a_{k+n}$ равно количеству различных чисел среди чисел $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+n-1}$ (например, для $n = 3$ возможна последовательность 1, 5, 1, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, …). Докажите, что начиная с некоторого члена данная последовательность периодична.

*Д.Чарыев*

**М2383.** а) Известно, что $2^x q = p^y + 1$, где $x, p, q, y$ – натуральные, большие 1, причем $p$ и $q$ – простые. Может ли $x$ оказаться составным?

б) В равенстве $2^x q = p^y - 1$ числа $x, p, q$ – простые, а $y$ – натуральное, большее 1. Чему может равняться $p$?

*В.Сендеров*

**М2384.** В треугольнике $ABC$ вписанная окружность касается стороны $BC$ в точке $D$. Пусть $J_b$ и $J_c$ – центры окружностей, вписанных в треугольники $ABD$ и $ACD$ соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $AJ_bJ_c$ лежит на биссектрисе угла $BAC$.

*Ф.Ивлев*

**М2385.** Петя взял $k$ карточек ($k > 1$) и покрасил каждую с одной стороны либо в красный, либо в зеленый цвет. Затем он выложил эти карточки по кругу окрашенными сторонами вниз. За ход Вася может указать на любое множество карточек и выяснить, правда ли, что на карточках этого множества встречаются оба цвета. После нескольких ходов он должен либо указать две соседние карточки разных цветов, либо доказать, что все карточки одноцветны. За какое наименьшее число ходов он гарантированно может это сделать?

*И.Богданов, С.Волчёнков, А.Шаповалов*

**М2386*.** Озеро имеет форму выпуклого многоугольника. В некоторой точке озера находится лодка, а в другой точке растет водяная лилия. Если в некоторый момент лодка находится в точке $A$, то за один шаг она может проплыть по направлению к одной из вершин $B$ многоугольника расстояние, равное $AB/4$. Докажите, что можно выбирать на каждом шаге вершины так, чтобы через несколько шагов лодка оказалась на расстоянии менее 1 м от лилии.

*В.Ильичев*

**М2387*.** Пусть $p$ – простое число, $A_k = 1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k$. Докажите, что:

а) если $p \geq 7$ и $k$ – нечетное число такое, что $3 < k < p$, то $kpA_{k-1} - 2A_k$ делится на $p^4$;

б) если $p \geq 5$, то $p^2 A_{p-1} - 2A_p$ делится на $p^5$.

*И.Вайнштейн*

**М2388*.** Даны окружность и лежащий внутри нее эллипс с фокусом $C$. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников $ABC$, где $AB$ – хорда окружности, касающаяся эллипса.

*А.Заславский*

**Ф2388.** Солнце, Земля и Луна «выстроились» вдоль одной линии. Куда направлено ускорение Луны относительно далеких звезд? Каково отношение величин ускорений Луны в моменты лунного и солнечного затмений? Расстояние от Земли до Солнца $L = 150$ млн км, расстояние от Земли до Луны $D = 380$ тыс. км.

*А.Лунин*

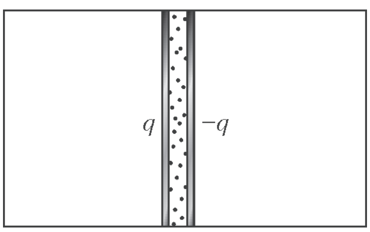
**Ф2389.** Концы однородной цепочки длиной $L$ и массой $M$ закреплены, и цепочка, состоящая из множества звеньев, свободно висит в воздухе. Касательные к цепочке в местах крепления концов составляют с горизонтом углы $\alpha$ и $\beta$ $(\alpha > \beta)$. Каково натяжение цепочки в самой нижней ее точке? Какова разность уровней (по вертикали) точек, в которых находятся самое верхнее и самое нижнее звенья цепочки?

*Ц.Почкин*

**Ф2390.** Горизонтальная плоская поверхность разделена прямой линией на две части. По одну сторону от прямой поверхность абсолютно гладкая, по другую – шероховатая, причем коэффициент трения $\mu$ в каждой ее точке пропорционален расстоянию от этой точки до разделительной прямой. Две одинаковые маленькие шайбы движутся поступательно по гладкой части поверхности перпендикулярно разделительной прямой и одновременно пересекают ее. Какая шайба остановится раньше, если скорость первой шайбы в 10 раз больше скорости второй?

*И.Акулич*

**Ф2391.** Два проводящих диска, заряженных зарядами $q$ и $-q$, могут двигаться без трения в длинном непроводящем цилиндре, расположенном горизонтально (см. рисунок). Между дисками находится некоторое количество гелия, за дисками газа нет. Заряды дисков мгновенно уменьшают вдвое, после чего ожидают прихода системы в равновесие. Пренебрегая теплообменом, найдите, во сколько раз изменятся температура газа и расстояние между дисками.




*А.Черноуцан*

**Ф2392.** На столе на высокой непроводящей подставке закреплен маленький шарик с зарядом $Q$. На другой подставке такой же высоты, которая находится на расстоянии $L$ от первой, закреплен шарнир. В шарнир вставлен и может свободно вращаться невесомый стержень, длина которого много меньше $L$. На концах этого стержня закреплены два маленьких шарика массой $m$ каждый с зарядами $+q$ и $-q$. Расстояния от шариков до оси вращения одинаковы. Диполь – два шарика с разными по знакам зарядами на стержне – раскрутили, и он начал быстро вращаться. Период обращения диполя равен $T$. Заряд $Q$ и заряды $+q$ и $-q$ всегда находятся в одной и той же горизонтальной плоскости. С какой средней по времени силой взаимодействуют точечный заряд и диполь?

*С.Варламов*

**Ф2393.** Вася получил такое задание: на длинный диэлектрический цилиндр с внешним радиусом $R$ намотать тонкую проволоку фиксированной длины так, чтобы в одной из точек на оси симметрии цилиндра можно было создать максимальную индукцию магнитного поля при пропускании по проволоке фиксированного постоянного тока. Когда задание было выполнено, оказалось, что максимальная толщина $h$ всех слоев проволоки на цилиндре равна $R$. Каким при этом оказалось максимальное расстояние между витками намотки вдоль оси цилиндра?

*В.Максимов*

**Ф2394.** Симметричная тонкая собирающая линза с оптической силой $D = 1$ дптр сделана из стекла с показателем преломления $n = 3/2$. Линза стоит на подставке посредине оптической скамьи, длина которой $L = 4$ м. На каком максимальном расстоянии от линзы на ее главной оптической оси нужно поместить на скамью очень маленький источник света, чтобы одно из его действительных изображений попало в один из фокусов линзы?

*Подсказка.* На границе раздела воздух–стекло происходит частичное отражение света.

*В.Сергеев*

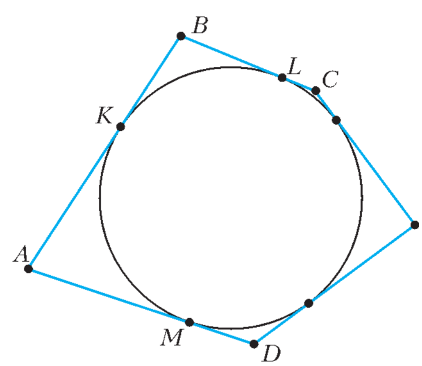
## Решения задач М2366–М2373, Ф2373–Ф2379

**М2366.** *С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл ее неожиданной, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3,4,2,5,5,5,2,3,4,3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четверка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок – по 10 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?*

Решение см. в статье Е.Бакаева «Мальчики, девочки, таблицы, графы ...» в этом номере журнала.

**М2367.** *Докажите, что в любом описанном около окружности многоугольнике найдутся три стороны, из которых можно составить треугольник.*

Пусть наибольшая сторона $AB$ многоугольника касается вписанной окружности в точке $K$, а $BC$ и $AD$ – соседние стороны (см. рисунок), пусть они касаются окружности в точках $L$ и $M$ соответственно. Тогда $BC > BL = BK$, $AD > AM = AK$, значит, $BC + AD > BK + AK = AB$. Получается, что наибольший из отрезков $AB$, $AC$ и $BC$ меньше суммы двух других, и, значит, из отрезков $AB$, $AC$ и $BC$ можно составить треугольник.




*Т.Казицына, Б.Френкин*

**М2368.** *Внутри прямоугольного треугольника построили две равные окружности так, что первая касается одного из катетов и гипотенузы, вторая каса-*

*ется другого катета и гипотенузы, а еще эти окружности касаются друг друга. Пусть M и N – точки касания окружностей с гипотенузой. Докажите, что середина отрезка MN лежит на биссектрисе прямого угла треугольника.*

Достаточно доказать, что середина $K$ отрезка $MN$ равноудалена от катетов $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$. Проведем общую касательную $l$ к двум окружностям через их точку касания. Так как окружности равны, то они симметричны относительно $l$. Значит, $l$ перпендикулярна прямой $AB$ и проходит через точку $K$. Пусть $l$ пересекает прямые $AC$ и $BC$ в точках $P$ и $Q$ соответственно (рис. 1). Прямоугольные треугольники $AKP$ и

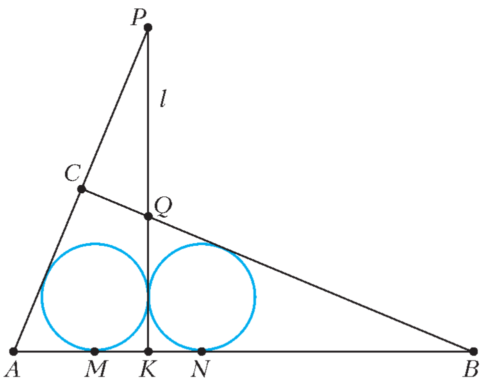


*Рис. 1*

$QKB$ очевидно подобны (углы $PAK$ и $QBK$ в сумме дают $90°$), а так как их вписанные окружности равны, то эти треугольники равны. Значит, равны и их высоты, опущенные из общей вершины $K$, т.е. расстояния от $K$ до прямых $AC$ и $BC$.

А вот еще одно простое решение. Проведем через центры $O_1$ и $O_2$ окружностей прямые, параллельные ближайшим катетам, до пересечения в точке $L$ (рис. 2). Углы $O_1LO_2$ и $O_1KO_2$ – прямые, значит, четырех-

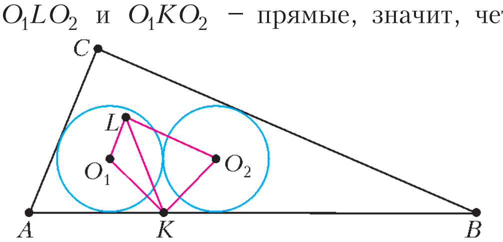


*Рис. 2*

угольник $O_1LO_2K$ – вписанный. Поэтому углы $O_1LK$ и $O_2LK$ равны как опирающиеся на равные хорды. Следовательно, $LK$ – биссектриса угла $O_1LO_2$, т.е. точка $K$ равноудалена от прямых $O_1L$ и $O_2L$, а значит, и от прямых $AC$ и $BC$ (расстояние между прямыми $O_1L$ и $AC$, как и расстояние между прямыми $O_2L$ и $BC$, равно радиусу исходных окружностей).

Приведем еще одно решение задачи, в котором не используется подобие.

Точка $K$ равноудалена от центров окружностей, а значит, существует поворот с центром в точке $K$, переводящий первую окружность (касающуюся катета $AC$) во вторую (касающуюся катета $BC$). Очевидно, что это поворот на $90°$. При этом повороте прямая $AC$ переходит, во-первых, в перпендикулярную прямую (так как поворот на $90°$). Во-вторых, она перейдет в прямую, касающуюся второй окружности (так как $AC$ касается первой окружности). Из этих двух условий следует, что прямая $AC$ перейдет в прямую $BC$. Значит, эти две прямые равноудалены от центра поворота $K$, и, таким образом, точка $K$ лежит на биссектрисе угла между этими прямыми.

*Е.Бакаев*

**М2369.** *Гриша записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Гриша повторил эту процедуру k раз, и все k раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение k.*

**Ответ**: 99.

*Оценка*. Пусть записаны числа $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Положим $b_i = a_i - a_1$. Многочлен сотой степени $P(x) = (x+b_1)\ldots(x+b_{100})$ не может принимать одно значение более 100 раз. Но по условию он принимает одно и то же значение в точках $a_1$, $a_1+1$, $a_1+2$, …, $a_1+k$. Следовательно, $k \le 99$.

*Пример*. Пусть записаны числа −99, −98, …, − 1, 0. Тогда при прибавлении к ним от одной до 99 единиц произведение полученных чисел равно нулю.

*И.Богданов, Л.Медников*

**М2370.** *Можно ли все натуральные делители числа 100! (включая 1 и само число) разбить: а) на две группы; б) на 100 групп так, чтобы в группах было одинаковое количество чисел и произведение чисел первой группы равнялось произведению чисел второй группы? в) Найдите все натуральные n, для которых можно разбить все делители числа n на две группы так, чтобы в группах было одинаковое количество чисел и произведение чисел первой группы равнялось произведению чисел второй группы.*

**Ответ**: а) можно; б) можно; в) все натуральные $n$, не являющиеся точными квадратами и не представимые в виде $p^{4t+1}m^2$, где $p$ – простое, $m$ натуральное, не кратное $p$, $t$ – целое неотрицательное.

Опишем нужное разбиение для пункта б). После этого для решения пункта а) будет достаточно объединить некоторые 50 групп в одну группу, а остальные 50 групп – в другую.

Покажем, что количество делителей числа 100! делится на 200. Действительно, воспользуемся формулой количества делителей $d(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_k+1)$ натурального числа $n$, имеющего разложение $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где $p_1, \ldots, p_k$ – различные простые числа. В разложение числа 100! на простые множители простые числа 11, 23, 89, 97 входят в 9-й, 4-й, 1-й, 1-й степени соответственно, поэтому $d(100!)$ делится на $10 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 200$.

Все делители можно разбить на пары вида $(x, 100!/x)$ (это возможно, так как 100! не полный квадрат) так, что произведение чисел в каждой паре равно 100!, причем количество таких пар кратно 100. Затем разобьем все делители числа 100! на 100 групп так, чтобы в каждой группе оказалось одинаковое число пар.

Теперь решим пункт в). Если $d(n)$ делится на 4, то можно использовать идею конструкции из задачи б): в этом случае все делители можно разбить на четное число пар вида $(x, n/x)$. Количество делителей $d(n)$ числа $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ делится на 4, если среди показателей $\alpha_i$ есть хотя бы два нечетных или хотя бы одно число вида $4t + 3$.

Остается разобрать случаи, когда все $\alpha_i$ четны, т.е. $n$ – точный квадрат, и когда все $\alpha_i$ четны, за исключением одного показателя вида $4t + 1$. В первом случае нужного разбиения не существует, потому что $d(n)$ нечетно.

Рассмотрим второй случай: $n = p^{4t+1}m^2$, где $m$ не делится на простое $p$. Все делители числа $n$ разбиваются на серии вида $q$, $pq$, $p^2q$, …, $p^{4t+1}q$, где $q$ пробегает делители числа $m^2$. В произведение чисел каждой серии $p$ входит с нечетным показателем $1 + 2 + \ldots$ $\ldots + (4t+1) = (4t+1)(2t+1)$, а число серий тоже нечетно (поскольку $d(m^2)$ нечетно). Следовательно, степень вхождения $p$ в произведение всех делителей числа $n$ нечетна, значит, нужное разбиение невозможно.

*Замечание*. Если в условии задачи в) снять ограничение про количество чисел в группах (т.е. все делители числа $n$ требуется просто разбить на две группы с равными произведениями), то к ответу задачи в) добавятся еще точные 4-е степени.

*М.Малкин*

**М2371.** *а) Назовем центром трехклеточного уголка точку, принадлежащую всем трем его клеткам. Шахматную доску $99 \times 99$ полностью покрыли трехклеточными уголками без наложений, после чего каждый уголок повернули вокруг своего центра на $90°$ (в любом направлении). Докажите, что при этом какая-то клетка доски оказалась непокрытой ни одним уголком.*

*б) Решите ту же задачу, если каждый уголок разрешается повернуть вокруг своего центра на $90°$ или на $180°$.*

а) Раскрасим доску в два цвета в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. Тогда черных клеток будет нечетное количество, а белых – четное. Назовем уголок белым (соответственно, черным), если в нем две белые (соответственно, черные) клетки. Пусть белых уголков $b$, а черных $c$. Тогда количество черных клеток равно $b + 2c$, а белых $2b + c$, откуда $b$ нечетно, а $c$ – четно. После описанных в условии поворотов белые уголки станут черными и наоборот, значит, черных уголков станет четное количество. Но если бы повернутые уголки покрывали всю доску, черных уголков должно было бы быть нечетное количество.

б) Предположим противное. Рассмотрим исходную конфигурацию уголков. Для уголка $X$ обозначим через $c(X)$ его центр, а через $f(X)$ – (единственную) клетку с вершиной $c(X)$, не лежащую в $X$. Заметим, что после поворота $X$ накроет $f(X)$. Для каждого уголка $X$ проведем стрелку из $c(X)$ в центр уголка, которому принадлежит $f(X)$; получится ориентированный граф с вершинами в центрах уголков (ясно, что каждая точка является центром не более чем одного уголка). Предположим, что в какую-то вершину $c(Y)$ входят две стрелки – из $c(X_1)$ и из $c(X_2)$. После поворота уголок $X_1$ накроет $f(X_1)$, уголок $X_2$ накроет $f(X_2)$, а уголок $Y$ займет три клетки, содержащие $c(Y)$. Значит, эти уголки накроют 5 клеток, содержащих $c(Y)$, что невозможно. Значит, из каждой вершины исходит ровно одна стрелка и входит не более одной стрелки. Тогда наш граф разбивается на циклы. Кроме того, если ребро из $c(X)$ идет в $c(Y)$ по стороне клетки (а не по диагонали), то $X$ и $Y$ покрывают все 6 клеток, смежных с $c(X)$ и $c(Y)$. Значит, они образуют прямоугольник $2 \times 3$ и из $c(Y)$ идет стрелка в $c(X)$. Итак, все ребра по сторонам клеток разбились на циклы длины 2. Остальные ребра идут по диагоналям; в каждом цикле из таких ребер четность абсцисс центров чередуется, значит, эти циклы также четны. Итого, общее число вершин четно; однако оно равно $99^2/3$. Противоречие.

*А.Грибалко*

**М2372*.** *Дана сфера $\Omega$ и точка $P$ внутри нее. Через $P$ проводятся три попарно перпендикулярные хорды $AA'$, $BB'$ и $CC'$. Точки $X$, $X'$ – проекции точки $P$ на плоскости $ABC$ и $A'B'C'$. Докажите, что все прямые $XX'$ проходят через одну точку.*

Пусть $PA \cdot PA' = PB \cdot PB' = PC \cdot PC' = r^2$. Выполним преобразование: инверсию относительно сферы $\Omega$ радиуса $r$ с центром $P$, а затем центральную симметрию с центром $P$ – так что $\Omega$ переходит в себя, а точки $A$ и $A'$, $B$ и $B'$, $C$ и $C'$ меняются местами. (О свойствах инверсии можно прочитать в статье В.Уроева «Инверсия» в «Кванте» №5 за 1984 год или в статье В.Арнольда «Инверсия в цилиндрических зеркалах метро» в «Кванте» №5 за 2010 год.)

Точка $X'$ при инверсии переходит в точку сферы $PABC$, диаметрально противоположную точке $P$, т.е. в противоположную для $P$ вершину параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$. Пусть это точка $Z$, тогда $\overrightarrow{PZ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. Пусть, аналогично, точка $Z'$ такова, что $\overrightarrow{PZ'} = \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC'}$. Имеем (с учетом перпендикулярности векторов $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$)

$$OZ^2 = \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)^2 =$$
$$= OP^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PC} +$$
$$+ PA^2 + PB^2 + PC^2 = \left(OP^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PA} + PA^2\right) +$$
$$+ \left(OP^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PB} + PB^2\right) +$$
$$+ \left(OP^2 + 2\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PC} + PC^2\right) - 2OP^2 =$$
$$= OA^2 + OB^2 + OC^2 - 2OP^2 = 3R^2 - 2OP^2.$$

Получаем, что $OZ$ и, аналогично, $OZ'$ равны одной и той же величине $m$, не зависящей от тройки хорд.

Далее, пусть $A_0, B_0, C_0$ – середины хорд, или проекции $O$ на $AA'$, $BB'$, $CC'$ соответственно. В силу перпендикулярности хорд,

$$\overrightarrow{PO} = \overrightarrow{PA_0} + \overrightarrow{PB_0} + \overrightarrow{PC_0} =$$

$$= \left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA'} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC'}\right)/2 = \left(\overrightarrow{PZ} + \overrightarrow{PZ'}\right)/2,$$

значит, $O$ – середина $ZZ'$. Окружности $PZZ'$, являющиеся образом прямых $XX'$ при нашем преобразовании, проходят через фиксированную точку, а именно – через точку $Q$ на продолжении отрезка $PO$ за точку $O$ такую, что $OQ \cdot OP = m^2$. Значит, и прямые $XX'$ проходят через фиксированную точку.

*А.Заславский*

**М2373*.** *В некотором государстве ценятся золотой и платиновый песок. Золото можно менять на платину, а платину – на золото по курсу, который определяется натуральными числами $g$ и $p$ так: $x$ граммов золотого песка равноценны $y$ граммам платинового, если $xg = yp$ (числа $x$ и $y$ могут быть нецелыми). Сейчас у банкира есть по килограмму золотого и платинового песка, а $g = p = 1001$. Государство обещает каждый день уменьшать одно из чисел $g$ и $p$ на единицу, так что через 2000 дней они оба станут единицами; но последовательность уменьшений неизвестна. Может ли банкир каждый день менять песок так, чтобы в конце гарантированно получить хотя бы по 2 кг каждого песка?*

**Ответ**: не может.

Докажем, что если вначале у банкира по 1 кг каждого песка и $g = p = k$, то в конце хотя бы одного песка будет не больше $2 - 1/k$ кг. Для этого достаточно доказать, что если вначале у банкира по $\frac{k}{2k-1}$ кг песка, то в конце он не может получить каждого песка больше чем по килограмму.

Назовем *состоянием* банкира число $S = Gp + Pg$, если у него $G$ кг золота и $P$ кг платины. Заметим, что в результате обмена песка по курсу состояние не меняется. Покажем индукцией по числу дней, что наибольшее гарантированное состояние банкира в день, когда курсы равны $g$ и $p$, не превосходит $\frac{2gp}{g+p-1}$.

В начальный день это так.

Пусть в некоторый день это так. Ясно, что при этом либо $Gp \ge \frac{g-1}{g+p-2}S$, либо $Pg \ge \frac{p-1}{g+p-2}S$. (Оба неравенства выполнены одновременно только в случае, когда оба превращаются в равенства.)

Пусть выполнено первое неравенство, т.е. $G \ge \frac{g-1}{g+p-2} \cdot \frac{S}{p}$. Тогда государство уменьшит $p$ на 1 (случай $g > p = 1$ будет разобран ниже). При этом из состояния вычтется $G$, т.е. оно станет равно

$$S - G \le \left(p - \frac{g-1}{g+p-2}\right) \cdot \frac{S}{p} = \frac{pg + p^2 - 2p - g + 1}{g+p-2} \cdot \frac{S}{p} =$$

$$= \frac{(p-1)(p+g-1)}{g+p-1} \cdot \frac{2g}{g+p-1} \le \frac{2g(p-1)}{g+(p-1)-1},$$

что и требовалось.

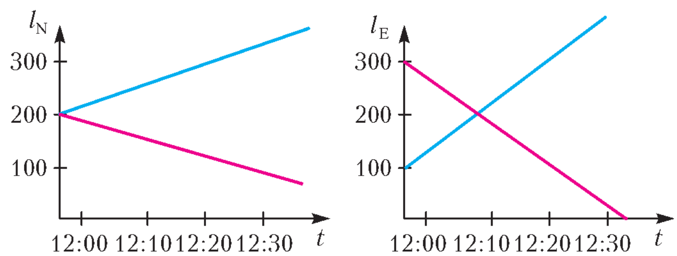
Случай, когда выполнено второе неравенство, в частности случай $g > p = 1$, разбирается аналогично.

В итоге, в последний день ($g = p = 1$) состояние будет не больше 2, а значит, количество какого-то песка будет не больше килограмма.

*Замечание*. Полученная оценка – точная. Если банкир каждый день будет делать так, чтобы массы золотого и платинового песков относились как $g(g-1) : p(p-1)$ (что возможно), то его состояние каждый день будет равняться $\frac{2gp}{g+p-1}$. В частности, в последний день у него будет ровно два килограмма песка и он сможет его обменять так, что каждого сорта будет по 1 кг.

*И.Богданов, Л.Медников*

**Ф2373.** *По горизонтальной поверхности ползут с постоянными скоростями два жука: синий и красный. Ваня построил графики зависимостей координат жуков от времени (см. рисунок). По горизонтальным осям отложено время (в часах и минутах), а по вертикальным – расстояния (в сантиметрах) от жуков до начала координат в направлениях на север (N) и на восток (E). Линии для красного жука – красные, а для синего – синие. В какой момент расстояние между жуками было самым маленьким? Каким было это расстояние?*




Скорости жуков в проекциях на оси N,E равны +5 см/мин и +10 см/мин для синего жука, −5 см/мин и −10 см/мин для красного жука. Если пересесть в систему отсчета, в которой один из жуков, например красный, покоится, и начало координат выбрать в месте нахождения этого жука, то в начальный момент времени координаты другого, т.е. синего, жука в новой системе отсчета равны 0 и −200 м, а проекции скорости в этой системе равны +10 см/мин и +20 см/мин. Квадрат расстояния $L$ между жуками зависит от времени и равен

$$L^2 = (10t)^2 + (-200 + 20t)^2 .$$

Минимуму квадрата расстояния соответствует и минимум расстояния между жуками. Этот минимум достигается при $t = 8$ мин, т.е. в момент времени 12:08. Минимальное расстояние между жуками равно

$$L_{min} = \sqrt{8000}\ \text{см} \approx 89{,}4\ \text{см} .$$

*В.Жуков*

**Ф2374.** *Маленькая бусинка массой $m$ надета на тонкую проволоку и скользит без трения вдоль этой проволоки, замкнутой в кольцо, имеющее форму эллипса. Плоскость кольца вертикальна, длинная полу-*

*ось эллипса вертикальна и имеет размер a, а короткая полуось эллипса горизонтальна и имеет размер b. Скорость движения бусинки в верхней точке кольца равна v. Какова по величине сила, с которой проволока действует на бусинку в точках траектории: 1) верхней; 2) нижней; 3) крайней по горизонтали?*

Введем оси координат $x$ и $y$ так, чтобы эллипс описывался уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Очевидно, что кривизна траектории максимальна и минимальна в точках, в которых $y = 0$ и $x = 0$ соответственно. При равенстве нулю одной из координат вторая координата вблизи этой точки зависит от времени $t$ по квадратичному закону. Если, например, $y = 0$ и бусинка находится в верхней точке кольца, то $dy/dt = v$. В этом случае

$$x = a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \approx a\left(1-\frac{1}{2}\frac{y^2}{b^2}\right) = a-\frac{av^2}{2b^2}t^2.$$

Такая зависимость координаты от времени соответствует движению с ускорением, которое направлено вниз и равно по модулю $av^2/b^2$. Это ускорение обеспечивается действием на бусинку двух направленных вниз сил – силы тяжести $mg$ и силы $N_1$ со стороны проволоки:

$$N_1+mg = m\frac{av^2}{b^2}.$$

Отсюда находим

$$N_1 = m\left(\frac{av^2}{b^2}-g\right).$$

В нижней точке квадрат скорости бусинки, в соответствии с законом сохранения энергии, будет другим:

$$v_2^2=\left(v^2+4ga\right).$$

Поэтому направленная вверх сила со стороны бусинки будет равна

$$N_2 = m\left(g+\frac{a\left(v^2+4ga\right)}{b^2}\right).$$

В самой крайней по горизонтали точке квадрат скорости бусинки равен

$$v_3^2=\left(v^2+2ga\right),$$

ускорение бусинки в этом месте имеет вертикальную ($g$) и горизонтальную ($v_3^2/b$) составляющие. Горизонтальную составляющую обеспечивает сила со стороны проволоки, равная

$$N_3 = m\frac{v^2+2ga}{b}.$$

*С.Варламов*

**Ф2375.** *«Долетайте до самого Солнца и домой возвращайтесь скорей!» – на заре космической эры была сложена песня с такой строчкой. Какое минимальное время требуется для полета космического корабля к Солнцу и обратно, если двигатели корабля работают только вблизи Земли на старте и финише?*

Чтобы космический корабль пролетел совсем близко от Солнца, но не упал на него, ему нужно по отношению к Земле на достаточно большом удалении от нее иметь скорость порядка 30 км/с. Тогда можно считать, что относительно далеких звезд и центра Солнца (в системе отсчета Коперника) корабль почти остановился. Чтобы корабль все-таки не упал на Солнце, траектория корабля должна быть сильно вытянутым эллипсом с большой осью, почти равной расстоянию $L$ от Земли до Солнца ($L = 150$ млн км $= 1$ а.е.), в одном из фокусов которого находится Солнце. Корабль пролетит возле Солнца и снова сможет удалиться от него на расстояние, равное расстоянию от Земли до Солнца. Период $t$ движения корабля по такой траектории можно найти, воспользовавшись третьим законом Кеплера:

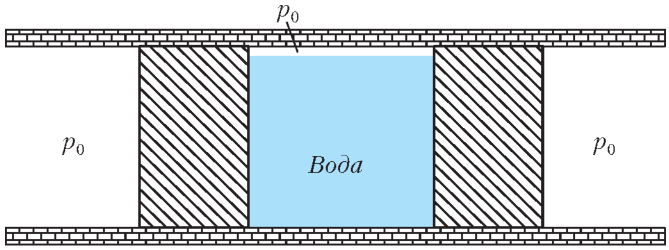
$$\frac{T^2}{L^3}=\frac{t^2}{(L/2)^3}, \text{ и } t=\frac{T}{\sqrt{8}},$$

где $T$ – это период обращения Земли вокруг Солнца, т.е. один год. Таким образом, период движения корабля, если не включать двигатели, примерно в три раза меньше года. Чтобы корабль и Земля снова оказались на малом (в сравнении с 1 а.е.) расстоянии, должен пройти 1 год. За этот год корабль трижды пролетит возле Солнца.

Однако, по-видимому, это не самое малое возможное время путешествия. Ведь для изменения скорости корабля и, соответственно, его траектории можно воспользоваться «помощью» планет, которые расположены ближе к Солнцу, чем Земля. Эти планеты – Меркурий и Венера. Если корабль пролетает вблизи массивной планеты, то сила ее притяжения меняет скорость корабля. Такое воздействие планеты на космический корабль называется гравитационным маневром. В частности, такими маневрами менялась скорость космического аппарата Вояджер-2, который пролетал вблизи Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Предлагаем заинтересовавшимся читателям рассчитать (возможно, с применением домашнего компьютера) такие маневры. Причем можно не ограничиваться поставленной чисто механической проблемой, а попытаться решить и задачу «выживания» такого космического корабля в окрестностях Солнца, где наверняка очень жарко.

*Д.Солнцев*

**Ф2376.** *В огромной длинной горизонтальной трубе квадратного сечения, которая разбита на три «камеры» двумя толстыми поршнями, есть центральная камера и две боковые, достаточно длинные (см. рисунок). Две стенки трубы вертикальны и две стенки горизонтальны. Стенки и поршни тепло не проводят. Центральная камера почти доверху заполнена водой, а над водой находится воздух при атмосферном давлении. Давление в левой и правой камерах все время атмосферное. Трения между поршнями и стенками трубы нет. В начальный момент поршни и вода неподвижны, расстояние между поршнями равно 40 м.*




*Поршни отпускают, и в течение некоторого времени система переходит в новое положение равновесия. Считая, что температура в начале и в конце одинакова и равна 81 °С, вычислите высоту уровня воды в конечном состоянии (в положении равновесия системы). На какое расстояние сместятся поршни? Сколько воды испарится? Какое количество теплоты нужно будет подвести в центральную камеру, чтобы температура в ней не изменилась? Высота трубы равна 40 м. Удельная теплота испарения воды 2,3 МДж/кг.*

Масса всей воды в центральной камере равна

$$m_{\text{в}} = \rho V = 10^3\ \text{кг/м}^3 \cdot 40^3\ \text{м}^3 = 6{,}4 \cdot 10^7\ \text{кг}.$$

Обозначим атмосферное давление $p_0$, высоту трубы $H$, высоту уровня воды в начальном состоянии (которая чуть меньше $H$) $h_0$. Так как давление жидкости с глубиной растет линейно, то эффективное давление для подсчета силы действия на поршень со стороны воды в конце процесса равно $p + \frac{\rho g h}{2}$, где $p$ – конечное давление над водой в центральной камере, а $h$ – искомая высота. Запишем условие равновесия правого поршня (для левого оно такое же):

$$p(H-h) + \left(p + \frac{\rho g h}{2}\right)h = p_0 H.$$

После преобразования получим

$$pH + \frac{\rho g h^2}{2} = p_0 H.$$

Поскольку температура в центральной камере остается постоянной и равной 81 °С, а при этой температуре давление насыщенных паров воды равно половине нормального атмосферного давления, то давление воздуха над водой будет представлять собой сумму давления насыщенного пара и давления воздуха, объем которого увеличился. В условии было отмечено, что воздуха над водой было мало, поэтому вкладом воздуха в конечное давление можно пренебречь. Следовательно, $p = p_0/2$, и

$$\frac{\rho g h^2}{2} = \frac{p_0 H}{2}.$$

Отсюда находим высоту уровня воды в центральной камере:

$$h = 20\ \text{м}.$$

Получается, что средняя камера будет только наполовину заполнена водой, а над ней будет насыщенный водяной пар. Плотность водяного пара во много раз меньше плотности жидкой воды, поэтому объем жидкости изменится мало. Поскольку сечение трубы – квадрат, уровень воды уменьшился в два раза, а объем воды изменился мало, то это означает, что расстояние между поршнями увеличилось в два раза – с 40 до 80 м. Следовательно, каждый поршень сместился от своего начального положения на

$$l = 20\ \text{м}.$$

Далее. Объем водяного пара в центральной камере стал равным

$$V_{\text{п}} = 20 \times 40 \times 80\ \text{м}^3 = 6{,}4 \cdot 10^4\ \text{м}^3.$$

Массу насыщенного водяного пара при 81 °С в этом объеме найдем из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$\frac{p_0}{2} V_{\text{п}} = \frac{m_{\text{п}}}{\text{M}} RT, \text{ и } m_{\text{п}} = 2 \cdot 10^4\ \text{кг}.$$

Эта масса во много раз меньше всей массы воды в центральной камере.

Теперь о теплоте. Центр масс воды опустился на $\Delta H = 10$ м вниз, следовательно, сила тяжести совершила работу

$$m_{\text{в}} g \Delta H = 6{,}4 \cdot 10^9\ \text{Дж}.$$

Поршни передвинулись и, действуя на внешний воздух, находящийся при атмосферном давлении, совершили работу

$$p_0 \Delta V = 10^5\ \text{Па} \cdot 40^3\ \text{м}^3 = 6{,}4 \cdot 10^9\ \text{Дж}.$$

Таким образом, вся работа силы тяжести пошла на расталкивание атмосферного воздуха. Удельная теплота испарения воды равна $L$ = 2,3 МДж/кг, и для испарения $m_{\text{п}} = 2 \cdot 10^4$ кг воды требуется количество теплоты

$$Q = L m_{\text{п}} = 4{,}6 \cdot 10^{10}\ \text{Дж}.$$

Поэтому для поддержания в средней камере неизменной температуры нужно было подвести именно такое количество теплоты.

*Д.Ягнятинский*

**Ф2377*.** *Из капельки мыльного раствора диаметром $d$ = 2 мм с коэффициентом поверхностного натяжения $\sigma$ = 40 мДж/м$^2$ выдули мыльный пузырь диаметром $D$ = 8 см. Найдите величину электрического заряда, который нужно сообщить пузырю, чтобы он начал всплывать в воздухе. Оцените разумность полученного результата вычислений. Плотность воздуха $\rho$ = 1,2 кг/м$^3$.*

Начальный объем пузыря равен

$$V_0 = \frac{\pi D^3}{6} = 2{,}7 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^3.$$

Давление внутри пузыря отличается от внешнего атмосферного давления на

$$\Delta p = 2 \cdot \frac{2\sigma}{D/2} = 4\ \text{Па}.$$

Эта величина значительно меньше атмосферного давления $p_0 = 10^5$ Па. Количество воздуха внутри пузыря фиксировано. Чтобы пузырь начал всплывать в воздухе, его средняя плотность должна стать меньше плотности воздуха. Для этого нужно, чтобы объем пузыря увеличился на

$$\Delta V=\frac{\rho_0\left(\pi d^3/6\right)}{\rho}=3{,}5\cdot10^{-6}\ \text{м}^3\ll V_0\,.$$

Здесь $\rho_0$ – это плотность мыльного раствора, которая, естественно, мало отличается от плотности воды, равной $10^3$ кг/м$^3$. Изменение объема мало, поэтому размеры пузыря изменились мало. Считаем, что температура воздуха в пузыре такая же, как и снаружи, и после зарядки пузыря не меняется. Давление воздуха внутри пузыря уменьшилось на

$$\Delta p=p_0\left(1-\frac{V_0}{V_0+\Delta V}\right)\approx p_0\frac{\Delta V}{V_0}=1290\ \text{Па}\,.$$

Такое же по величине давление, только с отрицательным знаком, должно быть создано электрическим полем, которое появится вблизи поверхности шарика после его зарядки. Напряженность этого поля будет равна

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(D/2)^2}\,.$$

Давление электрического поля равно объемной плотности энергии электрического поля:

$$p_{\text{эл}}=\frac{\varepsilon_0E^2}{2}=\frac{Q^2}{2\pi^2\varepsilon_0D^4}\,.$$

Из равенства $\Delta p=p_{\text{эл}}$ получается величина электрического заряда:

$$Q\approx3\cdot10^{-6}\ \text{Кл}\,.$$

Для проверки полученного ответа на «разумность» вычислим, какой толщины получится стенка мыльного пузыря, и оценим величину напряженности электрического поля, созданного вычисленным зарядом вблизи поверхности шарика. Толщина пленки равна

$$\frac{d^3}{6D^2}\approx2\cdot10^{-7}\ \text{м}\,.$$

Это примерно $10^3$ характерных размеров молекулы воды. Величина вполне разумная. Напряженность электрического поля равна

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(D/2)^2}\approx1{,}7\cdot10^7\ \text{В/м}\,.$$

Известно, что сухой воздух пробивается при напряженности электрического поля, равной примерно $3\cdot10^6$ В/м. Следовательно, полученный результат для электрического заряда нельзя считать «разумным».
Таким образом, задуманный эксперимент с полетом мыльного пузыря не получится.

*М.Пузырев*

**Ф2378.** *В однородном вертикальном магнитом поле B на параллельных горизонтальных толстых медных (сопротивления нет) направляющих, расстояние между которыми L, лежит перемычка, сопротивление которой R и масса m. К направляющим подключают заряженный до напряжения U конденсатор емкостью C. Трения нет. Перемычка приходит в движение. Какой будет установившаяся скорость перемычки? Какова эффективность (КПД) преобразования электрической энергии, отобранной у конденсатора, в механическую энергию? Какое количество теплоты выделилось в сопротивлении перемычки?*

Одна часть первоначальной энергии конденсатора превратилась в кинетическую энергию перемычки, другая часть перешло в тепла, и в конденсаторе осталась еще часть энергии электрического поля. Напряжение $U_1$, которое будет на конденсаторе после разгона перемычки, связано с установившейся скоростью перемычки $v$ условием равенства этого напряжения возникшей в перемычке ЭДС индукции:

$$U_1=vLB\,.$$

Импульс, полученный перемычкой, пропорционален электрическому заряду $q$, прошедшему через перемычку:

$$m\Delta v=mv=F\Delta t=ILB\Delta t=qLB\,.$$

Первоначальное напряжение $U$ и напряжение $U_1$, оставшееся на конденсаторе после разгона перемычки, связаны соотношением

$$C\left(U-U_1\right)=q\,.$$

Из этих трех соотношений получаются ответы на все вопросы задачи:

$$v=\frac{ULBC}{m+L^2B^2C}\,,\quad \eta=\frac{L^2B^2C}{m+2L^2B^2C}\,,$$

$$Q=\frac{CU^2}{2}\frac{m}{m+L^2B^2C}\,.$$

*А.Старов*

**Ф2379*.** *Научно-исследовательское судно провело наблюдение за волнением, вызванным упавшим в южной части Тихого океана метеоритом. При этом была получена зависимость периода колебаний волн T от времени наблюдения t. Результаты измерений представлены в таблице 1 (время t = 0 соответствует началу наблюдений в 12:00).*

*Таблица 1*

| $t$, ч | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$, с | 5,7 | 5,0 | 4,3 | 3,7 | 3,3 | 3,1 | 2,8 | 2,6 | 2,5 | 2,3 |

*Волна с длиной волны $\lambda$, распространяющаяся по поверхности воды в направлении оси x, описывается периодической функцией с уменьшающейся амплитудой: $y(t,x)=f(\omega t-kx)$. Эта функция периодична по времени с периодом $T=2\pi/\omega$ и периодична по координате с пространственным периодом $\lambda=2\pi/k$. Фазовая скорость распространения такой волны равна $v=\omega/k$. Оцените по этим данным расстояние от корабля до места падения метеорита, а также момент времени его падения.*
*Указания. Дисперсия волн в океане (зависимость фазовой скорости от длины волны) описывается законом $v=\sqrt{\dfrac{g\lambda}{2\pi}}$ (гравитационные волны на «глубокой» воде). Скорость распространения фронта волн*

*с длиной волны $\lambda$ определяется групповой скоростью $u = d\omega/dk$. Групповая скорость и может быть найдена по формуле Эйлера:* $u = v - \lambda \dfrac{dv}{d\lambda}$.

Учитывая, что $v = \omega/k$, из закона дисперсии находим зависимость фазовой скорости от частоты:

$$v = \frac{g}{\omega}.$$

Из формулы Эйлера для групповой скорости получаем

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} = \frac{1}{2} v = \frac{g}{2\omega}.$$

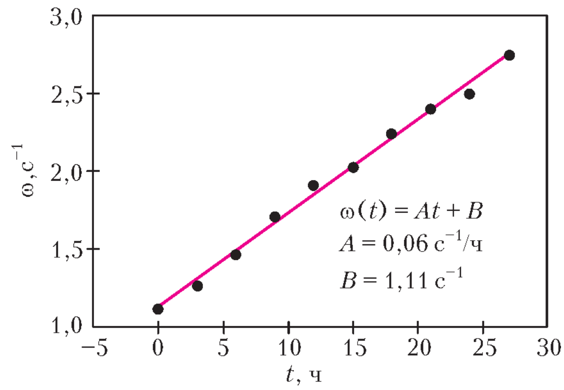
Если расстояние до места падения метеорита $L$, а регистрация волн началась через время $\tau$ после падения метеорита, то время прихода групп волн с частотой $\omega = 2\pi/T$ равно $t' = t + \tau$, т.е.

$$\frac{L}{u} = \frac{L}{g/(2\omega)} = t + \tau, \text{ или } \omega = \frac{g(t+\tau)}{2L}.$$

Получается, что частота $\omega$ линейно растет со временем, причем угловой коэффициент прямой $\omega(t)$ равен $A = g/(2L)$. Построим график зависимости $\omega = \omega(t)$, соответствующий таблице 2.

*Таблица 2*

| $t$, ч | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\omega$, $с^{-1}$ | 1,10 | 1,26 | 1,46 | 1,70 | 1,90 | 2,02 | 2,24 | 2,4 | 2,5 | 2,73 |




График, приведенный на рисунке, хорошо описывается прямой $\omega(t) = At + B$ с угловым коэффициентом

$$A = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = 0{,}06\ \text{с}^{-1}/\text{ч}.$$

Отсюда находим расстояние до места падения спутника на землю:

$$L = \frac{g}{2A} \approx 300\ \text{км}.$$

Метеорит упал за $\tau = B/A = 18{,}5$ ч до начала наблюдений. Учитывая, что наблюдения за волнением начались в 12:00, момент падения метеорита соответствует времени 17:30 предшествующих дню наблюдения суток.

*А.Гуденко*

## НАМ ПИШУТ

### Глиняные гири

Не секрет, что математика – вовсе не сухая и скучная наука. В ней много интересных задач, и бывает, что впечатление от решения красивой задачи запоминается на всю жизнь.

О таком ярком моменте из своих школьных лет написал нам наш читатель из города Пересвет Московской области Данил Владимирович Поташников, ветеран Великой отечественной войны. Вот несколько его строк о себе:

«В 1961 году закончил МАИ очно. В 1999 году заочно освоил пятигодичный курс Открытого университета Израиля. Не пропустил ни одну лекцию из цикла «Академия телеканала «Культура».

А вот выдержка из его письма о запомнившейся задаче:

«Когда я учился в пятом классе (а это было в городе Каменка Черкасской области на Украине в 1936 году), учитель математики записал на доске домашнее задание и попросил дополнительно решить головоломку.

*На Украине в XIX веке гири для рычажных весов изготавливались и самодельные – из глины. Самая большая была пудовая (40 фунтов). По дороге на ярмарку пудовая гиря упала с воза и разбилась на четыре части. Оказалось, что этими частями можно взвесить на рычажных весах любые покупки весом от одного до сорока фунтов. Суть задания: найти вес каждой части.*

Никогда не забуду ту бессонную ночь!

Когда я назвал вес каждой части: 1, 3, 9, 27, учитель попросил выйти к доске и пояснить ответ.

Один фунт – нелогично использовать две части для определения одного фунта.

Три фунта – «1» и «3» позволят взвесить 1, 2, 3 и 4 фунта.

Девять фунтов – сможем взвесить от 5 до 13 фунтов.

Двадцать семь фунтов – сможем взвесить от 14 до 40 фунтов.

На одной из последних встреч с учениками 6-го класса я попросил решить эту головоломку. Я сообщил детям свой телефон и обещал подарок тому, кто первый найдет решение.

Увы!»

Предлагаем нашим читателям справиться с таким обобщением этой головоломки, ставшим классической олимпиадной задачей:

*Докажите, что с помощью n гирь массами 1, 3, 9, … …, $3^{n-1}$ кг можно взвесить на чашечных весах любой предмет массой $M \le \dfrac{3^n - 1}{2}$ кг (M – целое число, гири можно класть на обе чаши весов).*

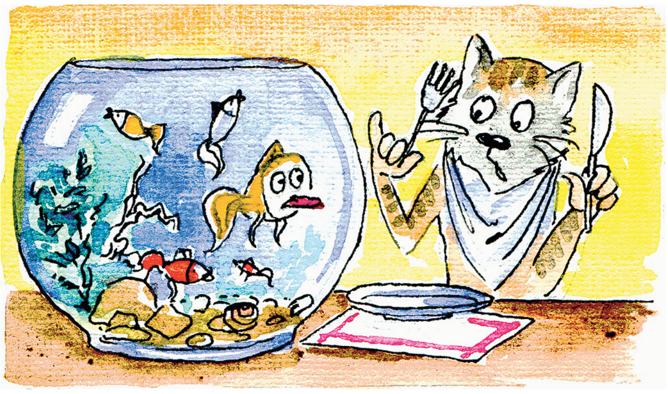
В завершение приведем еще одну цитату из письма Д.В.Поташникова:

«В этом году по просьбе детей и внуков я написал свои воспоминания, которые закончил словами «Я живу, пока познаю».

# Задачи

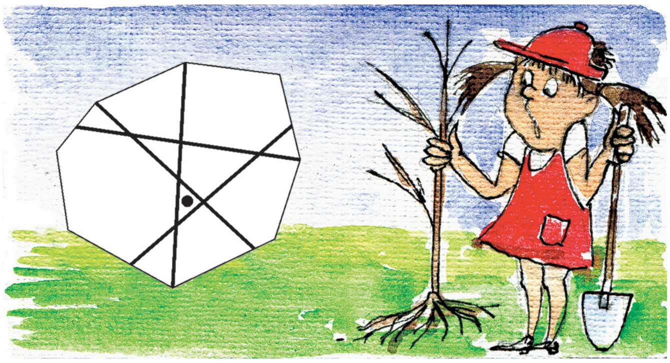
**1.** В аквариуме живет три вида рыбок: золотые, серебряные и красные. Если кот съест всех золотых рыбок, то рыбок станет на 1 меньше, чем 2/3 исходного числа. Если кот съест всех красных рыбок, то рыбок станет на 4 больше, чем 2/3 исходного числа. Каких рыбок – золотых или серебряных – больше и на сколько?

*И.Высоцкий, И.Раскина*



**2.** Во дворе, где проходят четыре пересекающиеся тропинки, растет одна яблоня (как показано на рисунке). Посадите еще три яблони так, чтобы по обе стороны от каждой тропинки было поровну яблонь.

*Е.Бакаев*



**3.** Володя бежит по круговой дистанции с постоянной скоростью. В двух точках дистанции стоит по фотографу. После старта Володя сначала некоторое время был ближе к первому фотографу, затем в течение 3 минут – ближе ко второму фотографу, а потом снова ближе к первому. За какое время Володя пробежал весь круг?

*В.Ковальджи*

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

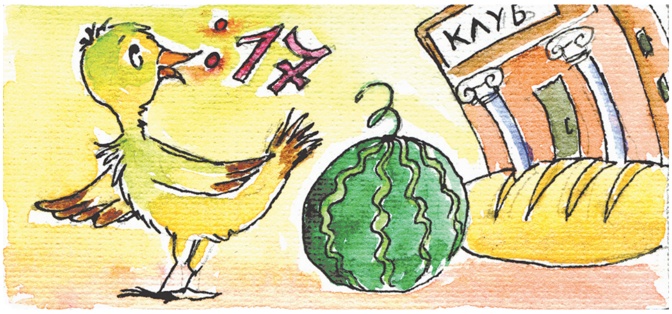
Задачи 1, 2, 5 предлагались на XXVI Математическом празднике, а вариация задачи 3 – на LXXVIII Московской математической олимпиаде.

**4.** Постарайтесь распутать данные три ребуса, которые никак между собой не связаны. Но все они расположены вместе, так как в каждом левом слове «скрывается» правое. Буквы должны быть заменены соответствующими цифрами, причем отличными от нуля.

Отметим, что каждый из этих ребусов имеет единственное решение.

1) ШУТКА : 17 = УТКА
2) АРБУЗ : 17 = ЗУБР
3) БУЛКА : 17 = КЛУБ

*Л.Штейнгарц*




**5.** Смешарики живут на берегах пруда в форме равностороннего треугольника со стороной 600 м. Крош и Бараш живут на одном берегу в 300 м друг от друга. Летом Лосяшу до Кроша идти 900 м, Барашу до Нюши – тоже 900 м. Докажите, что зимой, когда пруд замерзнет и можно будет ходить прямо по льду, Лосяшу до Кроша снова будет идти столько же метров, сколько Барашу до Нюши.

*Е. Бакаев, А. Хачатурян*

*Иллюстрации Д.Гришуковой*

# Эксперимент не удался

**И.АКУЛИЧ**

В прошлом году в одном лицее организовали математический вечер, на котором всем школьникам предложили проделать следующий опыт:

«Возьмите год своего рождения, запишите его цифры в обратном порядке и сложите с исходным числом. Цифры полученной суммы также запишите в обратном порядке и вычтите из большего числа меньшее. Результат должен делиться на 99».

Троечник Петя так и сделал, но перепутал порядок действий и сначала нашел разность, а уж потом – сумму. Поэтому эксперимент не удался.

Какой результат у него получился?

* * *

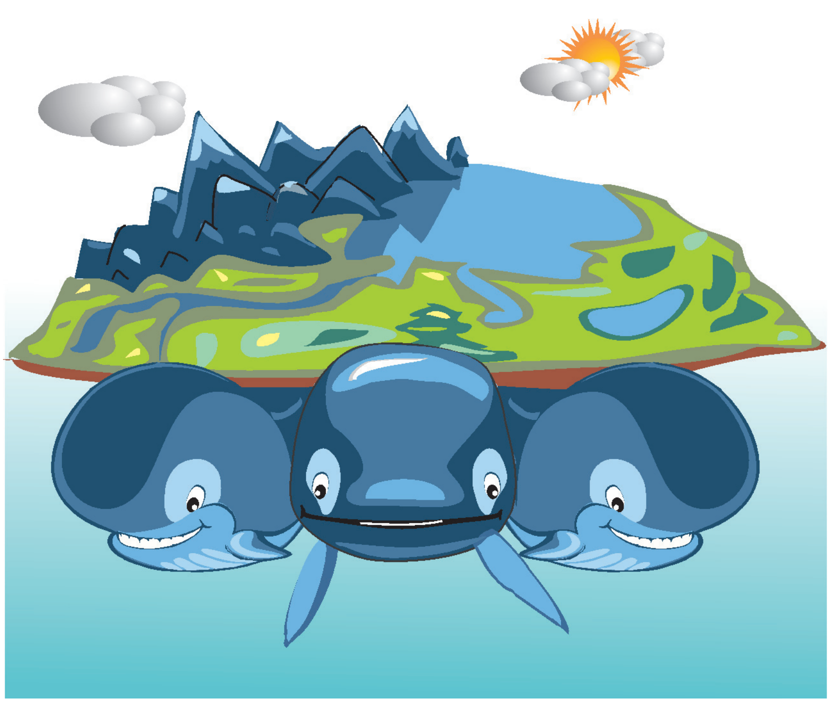
Начнем с примера. Пусть Петя родился, скажем, в 1999 году. Если бы он выполнял действия в нужном порядке, то сначала он получил бы сумму $1999 + 9991 = 11990$. Это число в обратном порядке даст 09911, т.е. 9911, и искомая разность –

$$11990 - 9911 = 2079 = 99 \cdot 21$$

– и вправду делится на 99.

А если действия перепутаны, сначала Петя получит число $9991 - 1999 = 7992$, а потом число $7992 + 2997 = 10989$. Но это число равно $99 \cdot 111$, т.е. тоже делится на 99.

Пока непонятно, ни почему эксперимент удается при правильном порядке, ни почему он мог не сработать у Пети, когда тот действия перепутал.



Предлагаем желающим ответить на вопросы самостоятельно, а потом свериться с нашим объяснением.

* * *

Решение задачи (как и планета Земля) держится на трех китах – вспомогательных теоремах. Вот они.

**1-й кит.** *Если цифры четырехзначного числа записать в обратном порядке и сложить с исходным числом, то результат будет делиться на 11.*

Доказательство таково. Обозначим цифры четырехзначного числа (слева направо) буквами $a$, $b$, $c$ и $d$. Тогда оно равно $1000a + 100b + 10c + d$, «обращенное» число равно $1000d + 100c + 10b + a$, а их сумма составит $1001a + 110b + 110c + 1001d$, что явно делится на 11 (ибо каждое слагаемое делится на 11). (А вообще-то утверждение верно для любого числа из четного количества цифр, но нам другое количество цифр не понадобится.)

**2-й кит.** *Если цифры числа, делящегося на 11, записать в обратном порядке, то результат тоже будет делиться на 11.*

Доказательство этого кита базируется на следующем признаке делимости на 11: число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на четных и нечетных местах, кратна 11 (доказывать этот признак здесь не будем – он широко известен и часто встречается в литературе). Очевидно, суммы цифр, стоящих на четных и нечетных местах, при записи цифр в обратном порядке не изменятся, и потому разность между ними как была кратна 11, так и останется.

**3-й кит.** *Если переписать цифры числа в любом другом порядке и вычесть из исходного числа, то результат будет делиться на 9.*

Эта теорема моментально вытекает из признака делимости на 9, поэтому и здесь задерживаться не будем.

Итак, сначала разберемся, почему должен был непременно получиться требуемый результат, если все действия выполнять как полагается. В самом деле, год рождения любого школьника – четырехзначное число, поэтому после сложения его с «обращенным» годом получится число, делящееся на 11 (1-й кит!). Далее, если цифры этого числа записать в обратном порядке, то результат тоже будет делиться на 11 (2-й кит!). Поэтому после вычитания из большего числа меньшего разность также поделится на 11. Кроме того, она поделится и на 9 (3-й кит!). Поэтому окончательный результат действительно должен делиться на $11 \cdot 9 = 99$.

А вот у Пети ничего не вышло. Почему же? Проанализируем его действия. Сначала он вычел год рождения из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке (или наоборот – это неважно). Тогда разность должна делиться на 9 (3-й кит!). Если эта разность четырехзначная (больше, очевидно, невозможно), то после сложения ее с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, сумма поделится на 11 (1-й кит!). Посему результат будет делиться на 99, и опыт удастся. А он не удался! Значит, имеет место единственная возможность: после вычитания получилось *не четырехзначное* число. Только в этом случае при последующем сложении сумма *может не поделиться* на 11 (и эксперимент провалится). Разберемся с этим подробнее.

В условии не зря упоминается, что опыт выполняли *школьники* (и дополнительно добавлено, что Петя был троечник – т.е. наверняка школьник). Несомненно, возраст любого ученика лицея не меньше 4 и не больше 20 лет (это если учесть возможных вундеркиндов или второгодников). Так как дело происходило (опять же по условию) в прошлом году, то год рождения любого школьника (и Пети в том числе) не меньше 1994 и не больше 2010.

Теперь можно было бы перебрать все возможные годы рождения (их всего-то 17), но можно заранее отбросить заведомо бесперспективные годы. Итак:

- годы с 1994-го по 1999-й отбрасываем, так как у «обращенного» числа первая цифра не меньше 4 и само обращенное число больше 4000, тогда как исходное число меньше 2000, так что разность между ними окажется больше 2000 – т.е. будет заведомо четырехзначной;
- годы с 2004-го по 2009-й отбрасываем по аналогичной причине (у «обращенного» числа первая цифра не меньше 4 и само обращенное число больше 4000, тогда как исходное число меньше 3000, так что разность между ними окажется больше 1000 – т.е. также будет четырехзначной).

Остальные годы рассмотрим по порядку их возрастания:

2000-й год: разность равна 2000 – 0002 = 1998;

2001-й год: разность равна 2001 – 1002 = 999;

2002-й год: разность равна 2002 – 2002 = 0;

2003-й год: разность равна 3002 – 2003 = 999;

2010-й год: разность равна 2010 – 0102 = 1908.

Вот и весь перебор. Как видим, в двух случаях разность все же получилась четырехзначная, еще в одном хотя и не четырехзначная, но равная 0, т.е. делящаяся на 11. Остальные же два варианта дают одинаковую разность 999, которая (вот счастье-то!) не делится на 11. Так как других вариантов нет, то приходится сделать однозначный вывод: после первого вычитания у Пети получилась разность 999, и тогда после сложения с обращенным числом он получил 999 + 999 = 1998.

**Ответ:** у Пети получился результат 1998.

А вот год рождения Пети мы назвать не можем: то ли 2001-й, то ли 2003-й.

# О методе раскраски на примере одной задачи

### *Д.КУЗНЕЦОВ*

НА МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАДАХ ЧАСТО ВСТРЕЧАются задачи, решаемые методом раскраски. Ознакомимся с этим методом, продемонстрировав его красоту сразу несколькими решениями одной известной задачи:

*Докажите, что клетчатую доску 10×10 нельзя разрезать по линиям сетки на прямоугольники 1×4.*

**Решение 1.** Разделим доску на квадраты 2×2 и раскрасим их в шахматном порядке (рис.1). Заметим, что любой прямоугольник 1×4 содержит поровну (по 2) черных и белых клеток, но при данной раскраске на доске 52 черных клетки и 48 белых, т.е. не поровну. Значит, разрезать доску 10×10 на тетрамино 1×4 не удастся.

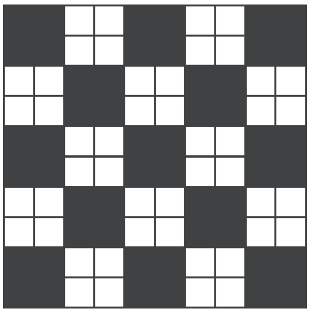


*Рис. 1*

Идея применения подобной «шахматной раскраски квадратами 2×2 возникает естественным образом из обычной шахматной раскраски, которая очень часто применяется для доминошек 1×2. А здесь мы имеем дело с фигурой в два раза крупнее, потому и раскраска стала в два раза крупнее, причем в обоих направлениях.

**Решение 2**. Раскрасим доску диагональной раскраской в 4 цвета (рис.2). Заметим, что любой прямоугольник содержит по одной клетке каждого из четырех цветов, но при данной раскраске на доске по 25 клеток 1-го и 3-го цветов, 26 клеток – 2-го и 24 клетки – 4-го, т.е. не поровну. Значит, разрезать доску 10×10 на тетрамино 1×4 не удастся.

**Решение 3.** Раскрасим доску диагональной раскраской в два цвета (рис. 3). Заметим, что любой прямоугольник содержит одну черную клетку, а их на доске – 24. Таким образом, нам удастся вырезать не более 24 тетрамино, а по площади надо 25 штук.

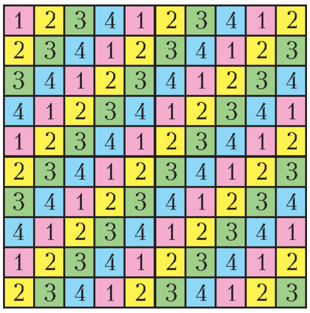



*Рис. 2*

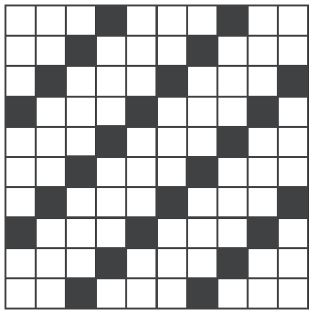


*Рис. 3*

Легко заметить, что данная раскраска является разновидностью диагональной раскраски на рисунке 2, когда в качестве черного цвета выделен цвет номер 4, которого меньше 25 клеток. С таким же успехом можно было бы использовать в качестве черного цвета и цвет номер 2, то тогда бы мы получили сразу 26 прямоугольников, что невозможно. Кроме того, можно было бы объединить в черный цвет и любые два соседних цвета с раскраски на рисунке 2. Например, если бы мы в качестве черного цвета использовали цвета номер 1 и 2, то у нас бы возникла раскраска рисунка 4.

**Упражнение 1.** Получите четвертое решение задачи, используя раскраску рисунка 4.

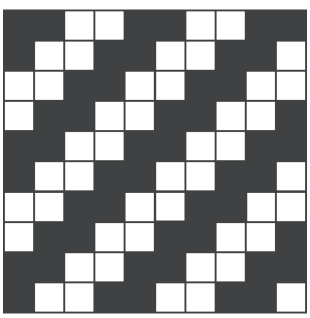


*Рис. 4*

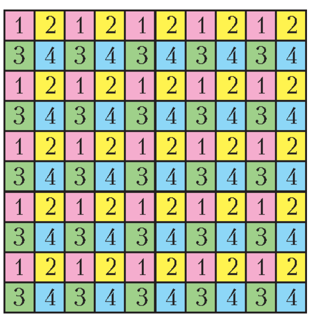



*Рис. 5*

**Решение 5**. Разделим доску на квадраты $2 \times 2$ и раскрасим их в 4 цвета одинаковым образом (рис.5). Тогда каждого цвета у нас будет по 25 клеток (нечетное количество), но при этом каждый прямоугольник содержит четное количество (0 или 2) клетки каждого цвета. И как следствие, во всех вырезанных тетрамино должно быть в сумме по четному количеству клеток каждого цвета, а не 25, что приводит нас к выводу о невозможности разрезания доски.

**Упражнение 2**. Получите шестое решение задачи, используя решетчатую раскраску на рисунке 6.

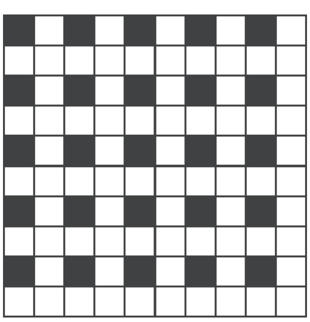


*Рис. 6*

Заметим, что раскраска на рисунке 6 является разновидностью предыдущей раскраски на рисунке 5, когда только один из четырех цветов выделен в качестве черного, а рассуждение является принципиально таким же. Кроме того, очень важным свойством раскраски с рисунка 5 является то, что она фактически каждый из двух цветов обычной шахматной раскраски в свою очередь тоже раскрасила в шахматном порядке (в данном случае черный цвет — во 2-й и 3-й, а белый — в 1-й и 4-й). Это свойство используется при решении некоторых задач методом раскраски.

**Решение 7.** Применим вертикальную полосатую раскраску доски в два цвета (рис. 7). Тогда любая вертикальная фигурка содержит кратное 4 (0 или 4) количество черных клеток, а любая горизонтальная — 2 черные клетки. А так как общее количество черных клеток — 50, т.е. при делении на 4 дает остаток 2, то общее число горизонтальных прямоугольников нечетно. Рассуждая аналогично для горизонтальной полосатой раскраски, мы докажем, что общее число вертикальных прямоугольников также нечетно, но тогда в сумме у нас должно быть четное количество всех прямоугольников, что не может равняться нужному нам числу 25, т.е. вывод прежний — разрезать не удастся.

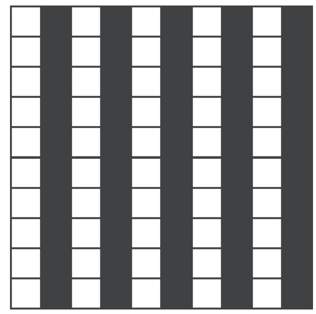


*Рис. 7*

В этом решении в полной мере проявилась специфика полосатой раскраски — разделение фигурок на два направления. Самое интересное заключается в том, что если мы будем считать при вертикальной полосатой раскраске белый и черный цвета соответственно за 0 и 1, а при горизонтальной полосатой раскраске — соответственно за 1 и 3, то при наложении этих раскрасок друг на друга и подсчете суммы чисел в каждой клетке у нас получится не что иное, как раскраска квадратами $2 \times 2$ в четыре цвета с рисунка 5.

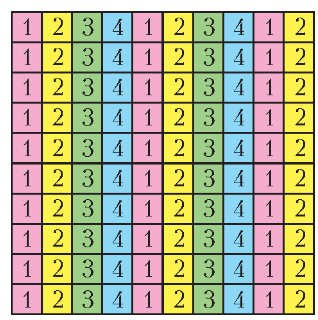



*Рис. 8*

**Упражнение 3.** Получите восьмое решение задачи, используя полосатую раскраску в 4 цвета на рисунке 8.

А теперь посмотрим, что получится при проведении в жизнь двух уже известных нам идей — сначала 4 цвета превратим в 2, а затем наложим раскраски.

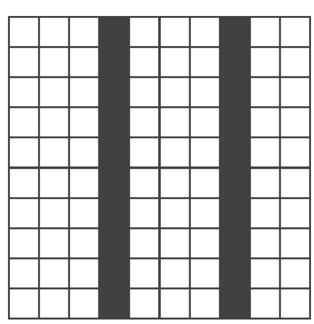


*Рис. 9*

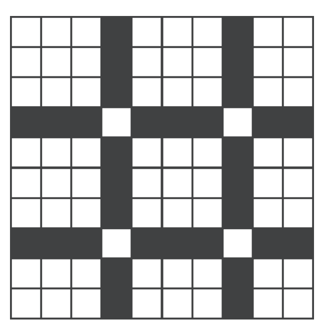


*Рис. 10*

**Упражнение 4.** Получите девятое решение задачи, используя вертикальную раскраску на рисунке 9 и аналогичную горизонтальную раскраску.

**Упражнение 5.** Получите десятое решение задачи, используя раскраску на рисунке 10 (она получена при наложении вертикальной и горизонтальной раскрасок из решения 9 по принципу «черный цвет – перекрашивание клетки в противоположный цвет»).

**Решение 11.** Если вертикальную раскраску с рисунка 9 и аналогичную горизонтальную раскраску наложить друг на друга и для красоты поменять цвета местами, то получится следующая решетчатая раскраска (рис.11). Тогда любой прямоугольник накрывает кратное 3 (0 или 3) количество черных клеток, а их на доске не кратное 3 количество (64). И как следствие, делаем вывод, что все черные клетки принадлежать прямоугольникам не могут, а значит, и разрезать доску $10\times10$ на тетрамино $1\times4$ нельзя.

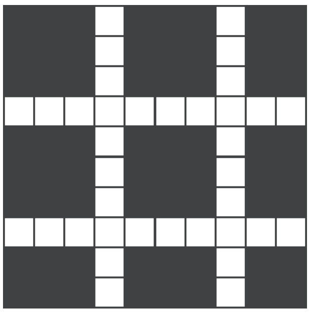


Рис. 11

**Решение 12.** Применим еще одну раскраску в 4 цвета, которая отличается от раскраски в 4 цвета квадратами $2\times2$ сдвигом каждой пары рядов относительно предыдущей пары на одну клетку (рис.12). Тогда каждый горизонтальный прямоугольник содержит по четному количеству клеток каждого цвета (0 или 2), а каждый вертикальный прямоугольник содержит по одной клетке каждого цвета. Так как каждого цвета будет по 25 клеток, то из выше изложенного следует, что количество вертикальных прямоугольников нечетно. Повернем раскраску на 90° и получим, что количество горизонтальных прямоугольников нечетно. Тогда в сумме у нас должно быть четное количество всех прямоугольников, что не может равняться нужному нам числу 25, т.е. вывод прежний – разрезать не удастся.

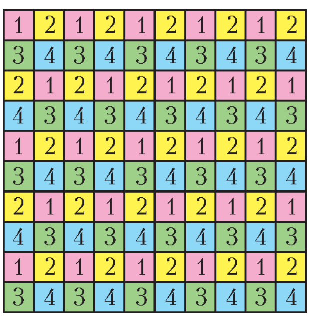



Рис. 12

**Вывод.** Надеемся, что приведенные решения наглядно проиллюстрировали красоту метода раскраски, а заодно и специфические свойства каждой из раскрасок в отдельности, особенно их взаимосвязи при наложении друг на друга. Например, в самом первом решении раскраска получается наложением друг на друга двух полосатых раскрасок, а значит, мы фактически можем предложить и «новое» решение, уже тринадцатое по счету. И из двенадцатого решения также можно создать «новое» решение, получаемое с помощью изложенных выше идей. Предлагаем еще придумать другие варианты раскрасок, дающих решения этой классической задачи.

Заметим еще, что рассмотренная нами задача про разрезание доски на фигурки $1\times4$ – частный случай более общей задачи. Пусть мы хотим разрезать прямоугольную доску на одинаковые клетчатые полоски $1\times N$. Когда это возможно? Оказывается, ответ очень простой – в том и только в том случае, когда длина хотя бы одной из сторон доски делится на $N$. Иными словами, если хоть какой-то способ разрезания есть, то обязательно есть и «тривиальный» способ – когда все полоски расположены «одинаково» (либо вертикально, либо горизонтально).

Решить эту общую задачу не так-то просто, но и тут есть решение, использующее раскраску! Попробуйте разобрать частный случай – докажите, что доску $15\times20$ нельзя разрезать на фигурки $1\times6$. А может быть, вам удастся справиться и с общей задачей?

### Дополнительные задачи на «метод раскраски»

**1.** Можно ли шахматным конем обойти все клетки доски $5\times5$, побывав на каждой клетке по одному разу и вернуться последним ходом в исходное положение?

**2.** Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?

**3.** На каждой клетке доски $9\times9$ сидело по жуку. По сигналу каждый жук переполз на одну из соседних клеток а) по стороне; б) по диагонали. При этом в каких-то клетках могло оказаться несколько жуков, а какие-то могли оказаться пустыми. Найдите наименьшее возможное количество пустых клеток.

**4.** На каждой клетке-треугольничке треугольной доски со стороной 5 сидит жук. В некоторый момент все жуки взлетают и приземляются на соседние (по стороне) клетки этой доски. Докажите, что тогда найдутся по крайней мере 5 пустых клеток.

**5.** На шахматной доске стоят несколько (не менее четырех) королей. Докажите, что их можно разбить на четыре группы так, чтобы короли каждой группы друг друга не били.

**6.** В левом нижнем углу доски $9\times9$ стоят 9 шашек, образуя квадрат $3\times3$. За один ход можно выбрать какие-то две шашки и переставить одну из них симметрично относительно другой (не выходя при этом за пределы доски). Можно ли за несколько ходов переместить эти шашки так, чтобы они образовали квадрат $3\times3$: а) в левом верхнем углу; б) в правом верхнем углу; в) в центральном квадрате $3\times3$?

**7.** Можно ли три попарно соседние грани кубика $4\times4\times4$ оклеить 16 полосками $3\times1$?

**8.** Из квадрата $8\times8$ по линиям сетки вырезали 8 квадратов $2\times2$. Докажите, что можно вырезать еще один квадрат $2\times2$.

**9.** Какими видами тетрамино (фигурки из 4 клеток) можно покрыть доску размером $10\times10$?

**10.** Можно ли шахматную доску разрезать на 15 вертикальных и 17 горизонтальных доминошек?

**11.** Прямоугольное дно коробки было выложено квадратами $2\times2$ и прямоугольниками $1\times4$. Один квадрат потеряли и вместо него нашли прямоугольник. Можно ли теперь сложить дно прямоугольной коробки?

# А что это холод на землю упал...

А.СТАСЕНКО

*...все крепче мороз! Лютый пронизывающий холод! Если бы святой Дунстен вместо раскаленных щипцов схватил сатану за нос этаким морозцем, вот тот взвыл бы от такого основательного щипка!*

Ч.Диккенс. Рождественская песнь в прозе

Как-то вечером один способный студент насмотрелся телеужасов о грядущих ледниковых периодах, о том, что станет с покинутыми городами через сто, двести, … лет, и вдруг подумал: а что если на Земле температура упадет на 200 градусов по Цельсию, т.е. достигнет 73 К? Он взглянул в Справочник физических величин и ахнул (см. таблицу): основные компоненты атмосферы –

| Газ | Массовая доля | Температура кипения $T_к$, К | |
|---|---|---|---|
| Кислород $O_2$ | 0,23 | 90 | основные газы |
| Азот $N_2$ | 0,75 | 77 | |
| Аргон Ar | 0,013 | 87 | «малые» газы |
| Углекислый газ $CO_2$ | $4{,}6\cdot 10^{-4}$ | 195 | |
| Криптон Kr | $3{,}3\cdot 10^{-6}$ | 120 | |
| Ксенон Xe | $4\cdot 10^{-7}$ | 165 | |
| Сероводород $CH_4$ | $8\cdot 10^{-7}$ | 112 | |
| Окись азота NO | $8\cdot 10^{-7}$ | 121 | |
| Озон $O_3$ | $10^{-8}-10^{-7}$ | 111 | |
| Неон Ne | $1{,}2\cdot 10^{-5}$ | 27 | |
| Гелий He | $7{,}2\cdot 10^{-7}$ | 4   $T_к < 73$ К | |
| Водород $H_2$ | $3{,}5\cdot 10^{-8}$ | 20 | |

азот и кислород – могут (по крайней мере, частично) стать жидкими, поскольку их температуры кипения $T_к$ равны 77 и 90 К соответственно. И только такие «малые» газы, как неон, водород и гелий, и не подумают конденсироваться ($T_к$ равны 27, 20 и 4 К) вовсе.

Что же произойдет с атмосферой при столь глубоком охлаждении? Очевидно, что если бы вся атмосфера Земли выпала в осадок, т.е. сконденсировалась на поверхности в виде жидкого слоя, то его толщина составила бы… ну, конечно, порядка десяти метров – ведь именно на такую высоту поднимались вода и вино в классическом демонстрационном опыте Блеза Паскаля (1623–1662) в Руане.

Однако, как свидетельствовали таблицы Справочника, даже при $-200$ °С азот и кислород имеют все еще немалое давление своих насыщенных паров: приблизительно 440 и 80 мм рт.ст. соответственно, а значит, в сумме 520 мм рт.ст. Здесь Студент воспользовался законом Дальтона, согласно которому давление смеси газов равно сумме давлений ее компонентов. А поскольку давления этих газов в обычной атмосфере составляют 600 и 160 мм рт.ст. (остальными «малыми» газами можно пренебречь), то это значит, что азота в «новой» атмосфере осталось $440/600 = 0{,}73 = 73\%$, а кислорода $80/160 = 0{,}5 = 50\%$ от прежнего количества. Зная это, можно вычислить среднюю плотность новой атмосферы. Приближенно ее можно оценить как

$$\rho_н = \rho_0\left(\frac{520}{760}\right)\left(\frac{273}{73}\right) = 3\ кг/м^3,$$

где $\rho_0 = 1{,}225$ кг/м$^3$ – плотность привычной нам атмосферы на уровне моря. Не удивительно ли – давление атмосферы упало, а ее плотность у поверхности даже выросла? Нет, не удивительно – это произошло из-за еще большего падения температуры (см. последний множитель).

А что же в новом океане? Плотность жидкого азота 800 кг/м$^3$, жидкого кислорода 1100 кг/м$^3$. Часть массы сжиженной атмосферы можно оценить как $\frac{760-520}{760} = 0{,}3$; значит, вспоминая десятиметровый барометр Паскаля, можно ожидать подъема уровня океана метра на 3–4, потому что эта кислородно-азотная жидкость стечет в озера и океаны. Причем глубина нового океана (дном которого стал лед – отвердевшая вода) будет еще несколько больше – это легко оценить, учитывая, что суша на современной Земле составляет приблизительно четверть поверхности глобуса. И, взглянув на глобус, Студент оценил приблизительно площадь, занятую новым океаном, – равнины Западной Сибири, Голландии, восточных штатов Америки, дельты Амазонки… И получилось, что волны нового океана будут плескаться у ног Медного всадника.

И тут эрудированный Студент решил изобразить графически зависимость плотности от высоты над уровнем моря (рис.1). Он выбрал две температуры и воспользовался барометрической формулой $\rho = \rho_0 e^{-\frac{mgy}{kT}}$ (здесь $m$ – средняя масса молекулы, $k$ – постоянная Больцмана). Студент помнил, что барометрическую формулу еще в 1686 году нашел Эдмонд Галлей (1656–1742), правда, в виде утверждения, что по мере возрастания высоты в арифметической прогрессии атмосферное давление (а в предположении постоянства температуры – и плотность) уменьшается в геометрической прогрессии. А еще он (Студент, а не Галлей) записал закон сохранения массы над каждым квадратным метром до охлаждения атмосферы и после охлаждения:

$$\int_0^\infty \rho_а(y,273)\,dy = \int_h^\infty \rho_а(y,73)\,dy + \rho_н h.$$

Геометрически это означает равенство площадей под кривыми, описывающими зависимость плотности вещества атмосферы от высоты в нормальном и охлажденном состояниях (см. рис.1).

Итак, на дне нового океана образуется плотный слой льда, над которым будут плескаться волны жидкого азота-кислорода. Но чтобы они плескались, нужен ветер. И над новым океаном ветер обязательно будет – ведь на полюсах холоднее, чем на экваторе, там азот и кислород могут вообще отвердеть, и оттуда будут приплывать айсберги твердой смеси $N_2-O_2$, постепенно тая в «теплых» широтах. А коль скоро ветер будет дуть над океанской гладью, возникнет так называемая неустойчивость поверхности (подуйте над водой в блюдце). Ветер выводит поверхность жидкости из состояния равновесия, а силы поверхностного натяжения и силы тяготения восстанавливают это равновесие. И появляются поверхностные волны.

И тут Студент крепко задумался: какова связь между скоростью $v$ и длиной $\lambda$ этих поверхностных волн? С одной

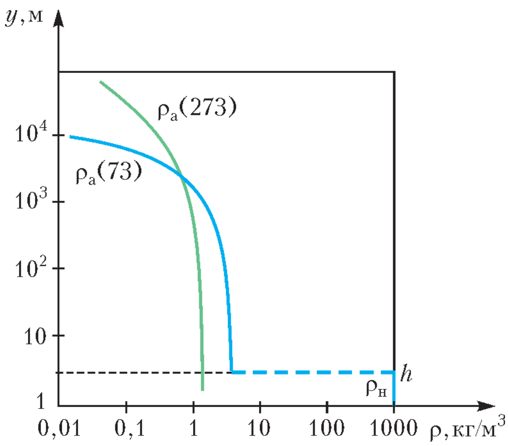



*Рис. 1. Зависимость от высоты плотности атмосферы и океана для двух значений температуры; $\rho_н$ – плотность сжиженных газов, $h$ – глубина их слоя*

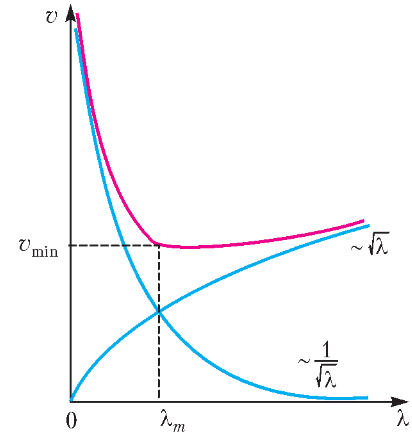



*Рис. 2. Зависимость скорости поверхностной волны от ее длины. Левее значения $\lambda_m$, соответствующего минимальной скорости $v_{min}$, – капиллярные волны, правее – гравитационные волны.*

стороны, если волны очень мелкие (капиллярные), то основную роль должно играть поверхностное натяжение, коэффициент которого имеет размерность $[\sigma] = Н/м$. С другой стороны, когда волны крутые (морские), существенным является тяготение, которое характеризуется ускорением свободного падения с размерностью $[g] = м/с^2$. Ну, разумеется, и плотность жидкости нужно учесть, а ее размерность есть $[\rho_н] = кг/м^3$.

Таким образом, можно составить две комбинации параметров для капиллярных и гравитационных волн, имеющие размерность скорости:

$$v_\sigma^2 \sim \frac{\sigma}{\rho\lambda} \text{ и } v_g^2 \sim g\lambda .$$

Теоретическая гидродинамика дает следующее точное выражение:

$$v^2 = v_\sigma^2 + v_g^2 = \frac{\sigma}{\rho\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)} + g\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right).$$

Здесь длина волны не случайно разделена на $2\pi$ – в результате получается так называемое волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. На рисунке 2 показана качественная зависимость скорости поверхностной волны от ее длины.

Теперь нетрудно найти наименьшую скорость (кто умеет, да продифференцирует приведенное выражение и приравняет результат к нулю) и соответствующую ей длину волны. Принимая для нового океана $\sigma = 0{,}01$ Н/м и $\rho_н = 900$ кг/м$^3$, получим

$$v_{min} = \sqrt{2\sqrt{\frac{\sigma g}{\rho_н}}} = 14{,}5 \text{ см/с} \text{ и } \lambda_m = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_н g}} = 6{,}6 \text{ мм} .$$

Отметим, что эту проблему более строго исследовал один из отцов-основателей Московского физтеха – академик Петр Леонидович Капица (1894–1984). Он получил, что минимальная скорость ветра, при которой возможно развитие (нарастание) волн на поверхности, приблизительно втрое больше $v_{min}$. Кстати, именно он разработал в нашей стране промышленную технологию сжижения газов (даже гелия).

Конечно, для дальнейшего развития волн нужно еще силовое воздействие. Если учесть, что сила, действующая на тело, движущееся в газе, пропорциональна плотности газа и квадрату скорости тела, то при увеличении плотности в 3 раза для возбуждения таких же волн на современной Земле скорость ветра должна быть в $\sqrt{3}$ раз меньше.

Но если длина волны становится сравнимой с глубиной $h$, тут применима «теория мелкой воды», которая дает совсем простую зависимость для скорости: $v = \sqrt{gh}$, «не чувствующую» свойств жидкости.

И тут Студенту привиделось, что Менделеев с Клапейроном требуют провести вычисления точнее, с учетом данных справочной таблицы. Проснувшись в холодном поту (почти –200 °С), Студент радостно вздохнул и побежал на экзамен по аэрогидротермодинамике.

# Отрицательная обратная связь

## А.СТАСЕНКО

*Как аукнется,*
*так и откликнется.*

Экспериментальный факт из физической акустики

Как-то мы с приятелем, наблюдая за водой, кипящей в котле над костром, вдруг осознали принципиальное различие двух ситуаций.

А) Вода, яростно вскипая, слегка заливает костер, который затем вновь разгорается, заставляя воду снова выплескиваться. Далее все повторяется. Этот процесс можно изобразить качественно в виде кривой *А* на рисунке 1 – например, на графике зависимости от времени $t$ выделяемой костром мощности $W$. Здесь реализуется так называемая отрицательная обратная связь.

Б) Воду заменили керосином. Понятно, что выплескивающийся керосин ведет к росту выделяемой костром энергии, и «система» идет в разнос по пути самоуничтожения (кривая *Б* на рисунке 1). Это пример положительной обратной связи.

Физики много сделали для понимания сути обратной связи. Старательным школьникам наверняка известно Правило Ленца (1833 г.): индукционный ток в контуре направлен так, что создаваемый им поток магнитной индукции через поверхность, ограниченную этим контуром, препятствует изменению потока, которое вызывает этот ток.

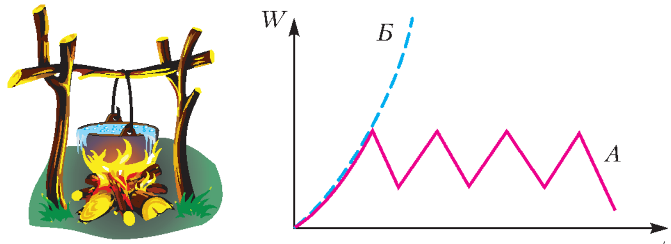


*Рис. 1*

Если эта фраза кому-то покажется скучной, поясним ее рисунком 2. Пусть контур, например кольцо из токопроводящего материала, пронизывается магнитным полем $B_+$,

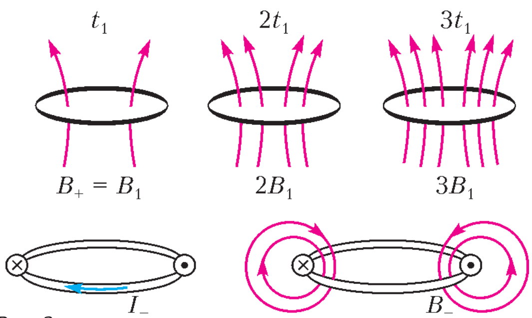


*Рис. 2*

которое изменяется со временем. На рисунке показано линейно растущее со временем число векторных линий магнитного поля $B_+$. Тогда в проводящем контуре, согласно правилу Ленца, возникнет индукционный ток $I_-$ (в этом частном случае, когда $B_+ \sim t$, ток $I_-$ постоянен). Но обратим внимание, в какую сторону течет этот ток. А именно, он направлен так, чтобы порожденное им магнитное поле $B_-$ препятствовало росту внешнего поля $B_+$.

Конечно, эти события происходят одновременно и на рисунке разнесены в пространстве только для облегчения понимания явления в целом. Подчеркнем, что правило Ленца напоминает только о знаке в уравнении, связывающем электродвижущую силу индукции в контуре с изменением во времени потока магнитного поля через этот контур (закон Фарадея, 1831 г.). Но это очень важное напоминание.

Да разве только в электродинамике действует обратная связь? Вот еще Принцип: «...внешнее воздействие, выводящее систему из состояния термодинамического равновесия, вызывает в этой системе процессы, стремящиеся ослабить эффект воздействия».

Исторически этот принцип был сформулирован по аналогии с правилом Ленца в общем виде французским химиком А. Ле Шателье (1884 г.) и термодинамически обоснован немецким физиком К.Брауном (1887 г.).

Эта отрицательная обратная связь играла важную роль с самого начала бурного развития техники. Впервые она была применена при создании часов (Галилей, 1583 г.). А как не вспомнить центробежный регулятор Уатта (1784 г.), не позволяющий водяному пару взорвать котел; или золотник, вовремя переключающий подачу пара в цилиндр и выброс пара в атмосферу. С тех пор расцвела Теория автоматического регулирования, в которой обратная связь является принципиальным элементом. Кстати, в ее создании участвовал и великий английский ученый Дж.Максвелл (в систему уравнений которого входит и упомянутый выше закон Фарадея).

Да взять хотя бы самые простые примеры (рис.3). Отклоним шарик массой $m$, подвешенный на нити длиной $l$ в поле сил тяжести, или растянем пружину жесткостью $k$ – тут же появляются возвращающие силы $F_- = -mg\sin\alpha$ и $F_- = -kx$. Разве сам знак «минус» не говорит о возникновении *отрицательной* обратной связи? И в результате начинаются колебания, происходящие по законам синусов: $\sin\sqrt{\frac{l}{g}}\,t$ и $\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$ (или по законам соответствующих косинусов; см. кривую *А* на рисунке 3), которые известны любому школьнику. А если бы вместо «минуса» кто-то, не дай Бог, поставил знак «плюс», то выполнялись бы законы экспонент: $\exp\sqrt{\frac{l}{g}}\,t$ и $\exp\sqrt{\frac{k}{m}}\,t$ – и система, уходя все дальше от положения равновесия, перестала бы существовать (см. кривую *Б* на рисунке 3).

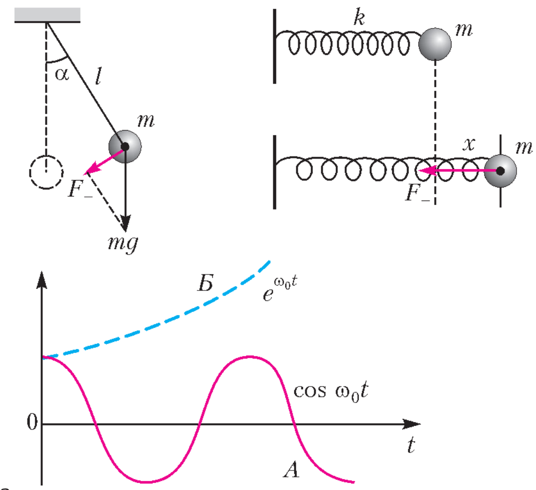


*Рис. 3*

Итак, да не ошибемся в знаке перед возвращающей силой – только он реализует наиболее общий, устойчивый вид движения – колебания около положения равновесия. А ведь они и обеспечивают устойчивое существование Вселенной. Да это заметили и философы без всяких формул и рисунков:

«Весь мир – это вечные качели. Все, что он в себе заключает, непрерывно качается...Даже устойчивость – и она не что иное, как ослабленное или замедленное качание» (М.Монтень, 1533–1592).

«Неужели же колебание – принцип?

– Первый в жизни. Единственный, который тверд. Тот, которым цветет все и все живет» (В.В.Розанов, 1856–1919).

А какую благую роль играют фазовые превращения воды! Вот жгучее Солнце испаряет часть влаги с поверхности Земли – и смотрите, как Природа разумно все устроила: и теплый воздух оказывается легче холодного, и молярная масса воды меньше, чем у атмосферных газов. В результате эта нагретая смесь всплывает вверх, где холодно; там происходит конденсация пара воды в капли, которые вновь выпадают на поверхность Земли. Вот вам и еще обратная связь. И все это повторяется миллионы лет.

А что происходит зимой? Вода замерзает, выделяя при конденсации тепло, чтобы не так уж было холодно; лед, оказавшись легче воды, покрывает водоемы и не дает им промерзнуть до дна, спасая рыб. Весной же, наоборот, на таяние льда и снега потребуется тепло, а для «смягчения» опасности наводнений опять-таки периодически возникают облака для уменьшения потока солнечной энергии. Еще одна обратная связь.

Дыхание, биение сердца, колебания параметров экологических систем – тоже результат обратных отрицательных связей.

Итак, слава *отрицательной* обратной связи, играющей самую *положительную* роль в устойчивости нашего Мира!

# Сломанный грифель

**А.БЕРДНИКОВ**

На обеих фотографиях, представленных на рисунке 1, изображены два скрещенных грифеля, при этом аппарат сфокусирован вдаль. Тот грифель (тонкий), что

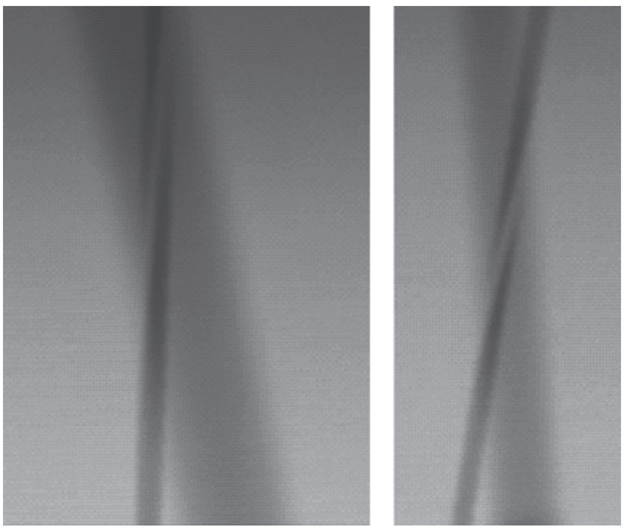


Рис. 1

находятся подальше, кажется переломленным посередине. В этом вы можете убедиться сами: просто посмотрите вдаль «сквозь» перекрещенные грифели (один расположите, например, на расстоянии 2 см, другой – 10 см от глаза). Дальний грифель будет пересекать «полоса небытия», из-за которой он двоится или кажется сломанным.

Объяснить такой результат опыта можно достаточно просто. Дело в том, что ближний грифель загораживает часть заднего. Разберемся подробнее.

Сначала попробуем понять, какие части стены, на которую сфокусирован глаз, мы видим. Ну, видеть-то мы видим все, просто одни ярче, другие – темнее. Эта яркость определяется тем световым потоком, который от данного куска стены попадает в наш зрачок, минуя оба стержня. Чтобы освоиться, посмотрим, как такой подход работает на примере одного грифеля.

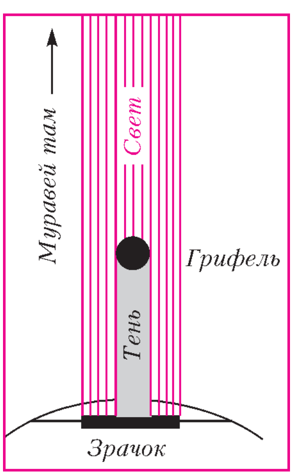



Рис. 2

Возьмем участок стены прямо за грифелем и для наглядности посадим туда муравья с фонариком, чтобы понимать, свет от какой точки стены мы будем обсуждать (рис.2). Сейчас фонарик отбрасывает заметную тень на зрачок. Поэтому прямо по центру мы видим стену затемненной. Хотя мы смотрим непосредственно «в середину грифеля», мы видим стену за грифелем с помощью выглянувшего из-за угла края зрачка.

Пустим муравья с фонариком по стене вправо. Тень, отбрасываемая грифелем, будет двигаться по зрачку влево, плавно исчезая. Все сходится: темная полоса на фотографии (рис.3) плавно исчезает с краев. Для наглядности на фотографии покажем положения муравья, соответствующие рисункам в рамке такого же цвета.

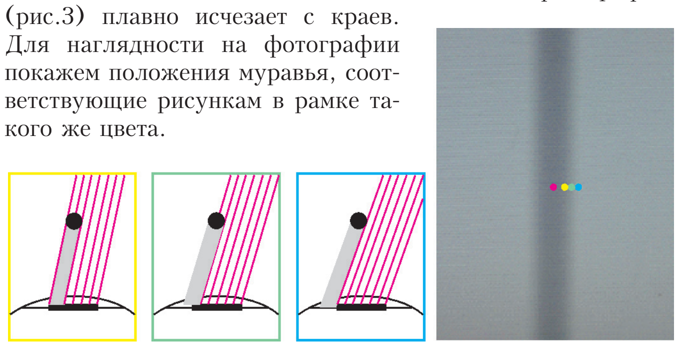


Рис. 3

Теперь пора перейти к двум грифелям. Пустим муравья заползать справа в интересующее нас место (рис.4). В синей точке тень от его фонаря отбрасывает в глаз только ближний грифель. В красной точке к нему присоединяется и дальний грифель, поэтому это место особо темное. Но что происходит в

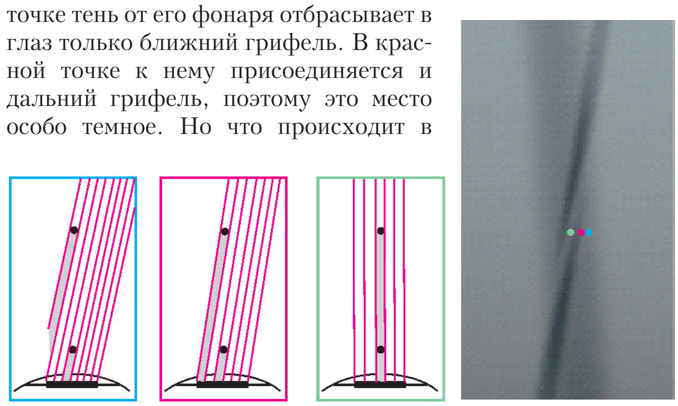


Рис. 4

зеленой точке? Тень от дальнего грифеля пропала, так как падает на ближний стержень, а не в глаз. Неважно, что грифели стоит два в ряд, тень от этого гуще не становится – ведь грифели только на фотографии кажутся полупрозрачными. Вот в зеленой точке изображение и кажется ярче.

Осталась еще одна особенность нашей полосы. Может показаться, что эта полоса если и есть, то где-то между грифелями, как можно ближе к ним обоим. Но на фотографии (см. рис.4) видно, что когда дальний грифель уходит вправо, то светлая полоса идет еще правее, опережая его. С этой загадкой мы уже можем без труда справиться.

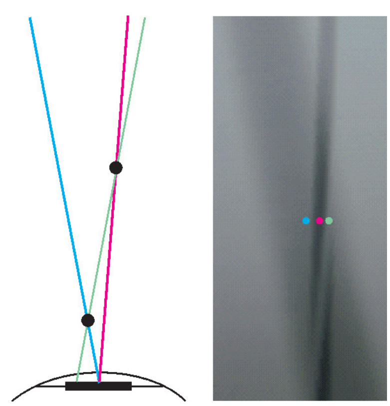


Рис. 5

На рисунке 5 показаны направления (а на фотографии – точки стены), соответствующие видимым серединам ближнего грифеля (синее), дальнего (красное) и светлой полосы, где тени от грифелей сливаются (зеленое). Видно, что зеленое направление идет правее двух других, т.е. светлая полоса находится правее середин обоих грифелей.

Победа!

# Каскады из правильных многогранников

Правильные многогранники (рис. 1) с древних времен привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Их поражали красота, совершенство, гармония этих многогранников.

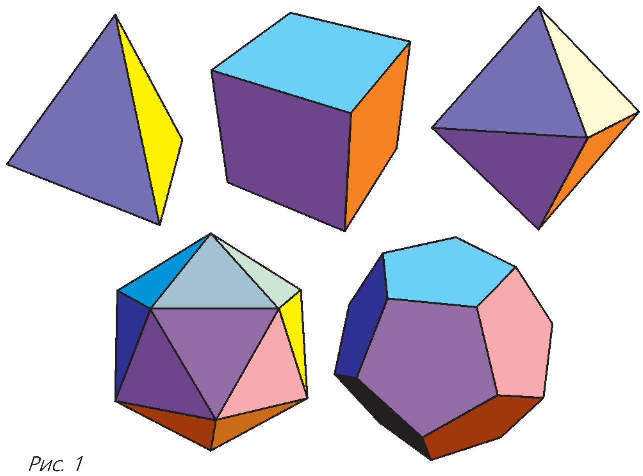


*Рис. 1*

Здесь мы расскажем, как правильные многогранники можно вписывать друг в друга. Вписывая один многогранник в другой, другой – в третий и т.д., можно получать красивые «каскады» правильных многогранников.

В куб можно вписать октаэдр (рис. 2). Центры граней куба образуют вершины вписанного в него октаэдра.

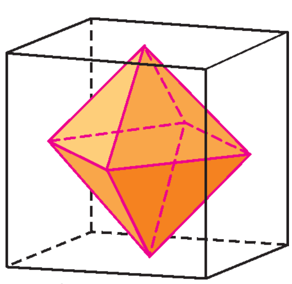


*Рис. 2*

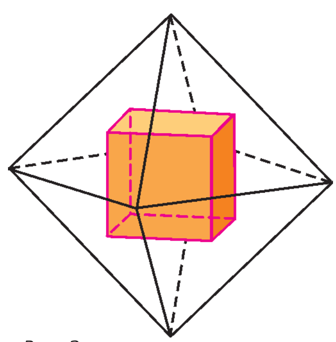


*Рис. 3*

В свою очередь, центры граней октаэдра образуют вершины вписанного в него куба (рис. 3).

Многогранники, обладающие таким свойством, называются взаимно двойственными.

Другим примером взаимно двойственных правильных многогранников являются додекаэдр и икосаэдр (рис. 4, 5).

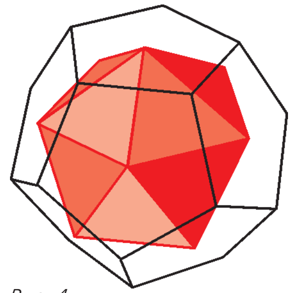


*Рис. 4*

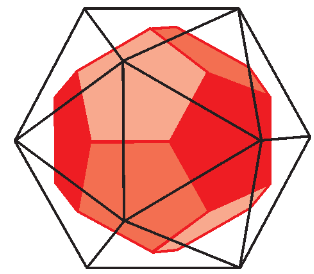


*Рис. 5*

В куб можно вписать тетраэдр, при этом вершины тетраэдра будут лежать в вершинах куба (рис. 6).

В свою очередь, куб можно вписать в додекаэдр так, чтобы вершины куба лежали в вершинах додекаэдра (рис. 7).

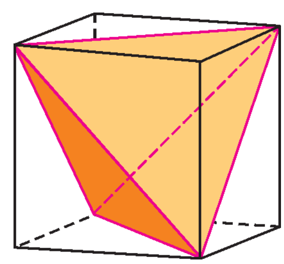


*Рис. 6*

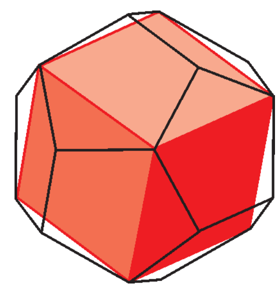


*Рис. 7*

При вписывании одного правильного многогранника в другой вершины первого могут лежать на серединах ребер второго. Так в правильный тетраэдр можно вписать октаэдр (рис. 8).

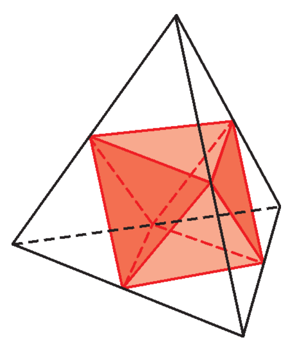


*Рис. 8*

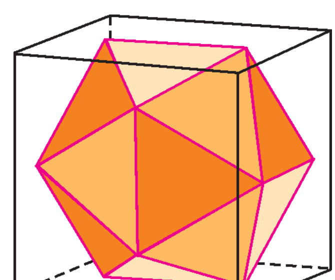


*Рис. 9*

Более сложным способом в куб вписывается икосаэдр: середины ребер икосаэдра лежат в центрах граней куба (рис. 9). Попробуйте вычислить отношение ребер куба и икосаэдра в этой конфигурации.

Аналогичным образом в куб можно вписать додекаэдр (рис. 10).

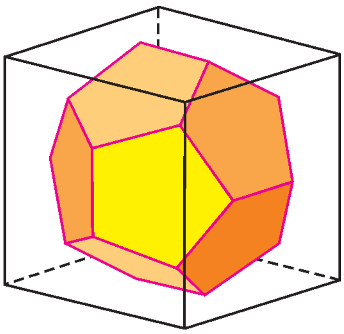


Рис. 10

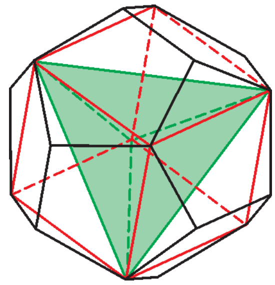


Рис. 11

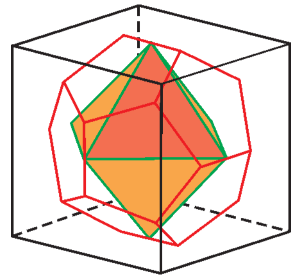


Рис. 12

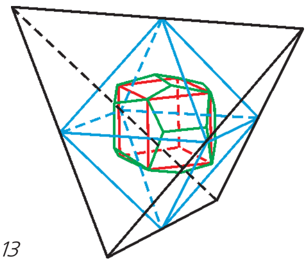


Рис. 13

Оказывается, комбинируя рассмотренные случаи, в любой правильный многогранник можно вписать все остальные правильные многогранники. Скажем, из рисунков 11 и 12 видно, как в додекаэдр вписать тетраэдр и октаэдр.

Это означает, что из правильных многогранников можно сделать «каскады», вписывая их друг в друга в любом порядке. Например, на рисунке 13 изображен каскад «тетраэдр — октаэдр — додекаэдр — куб».

Еще несколько каскадов изображено на рисунках 14—19.

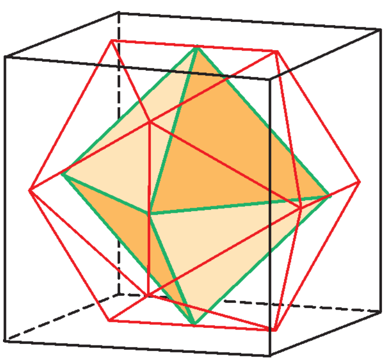


Рис. 14

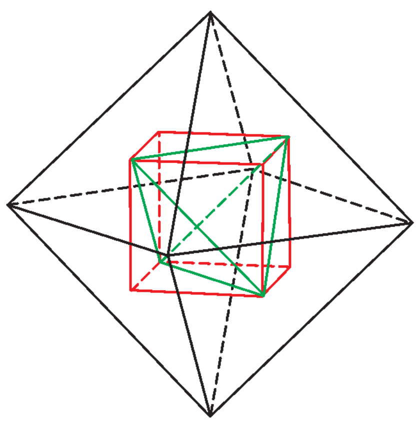


Рис. 15

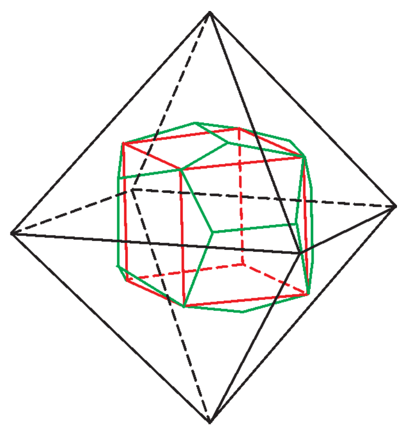


Рис. 16

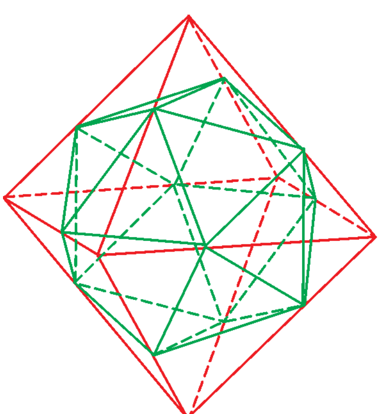


Рис. 17

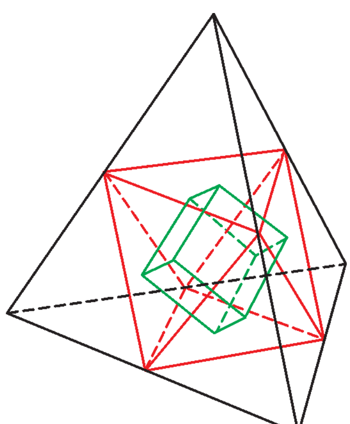


Рис. 18

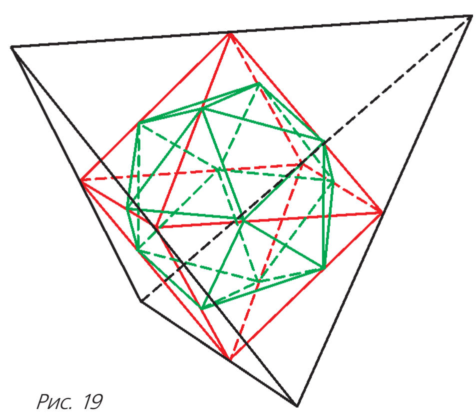


Рис. 19

*Материал подготовили И.Смирнова, В.Смирнов*

# Линии магнитного поля – простые и сложные

Н.ГОРБАТЫЙ, Д.ЭПИКТЕТОВ

*Поскольку линии не имеют ни конца, ни начала, они часто возвращаются в исходную точку, образуя замкнутые петли. Но могут возникать и более сложные случаи, когда линии не представляют собой простых петель.*

Фейнмановские лекции по физике

## Введение

Понятие силовых линий было введено М.Фарадеем при исследовании электричества и магнетизма, а затем получило дальнейшее развитие в работах Дж.Максвелла. Напомним, что магнитной силовой линией [1], или линией магнитного поля, называют геометрическую линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с вектором $\vec{B}$ индукции магнитного поля в этой точке.

В учебниках подчеркивается основное свойство магнитных линий: они, в отличие от линий электростатического поля (силовых линий), которые начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных, нигде не начинаются и не заканчиваются, так как в природе нет магнитных зарядов. Легко показать, что магнитные линии длинного прямого провода с током представляют собой окружности, центры которых лежат на оси провода. Легко верится и в то, что магнитные линии провода с током, свернутого в окружность, представляют собой плоские замкнутые кривые, похожие на эллипсы. Кажется, что и в том случае, когда провод с током имеет произвольную форму, картину магнитных линий можно получить, мысленно надевая на провод замкнутые «витки-петли», как-то их деформируя и располагая в пространстве без пересечений. Увы, такая простая картина верна лишь в редких случаях.

В книге нобелевского лауреата И.Е.Тамма «Основы теории электричества» (первое издание книги вышло еще в 1929 году) отмечается: «…силовая линия может не иметь ни начала, ни конца и вместе с тем не быть замкнутой и не идти из бесконечности в бесконечность. Этот случай имеет место, если силовая линия заполняет собой некоторую поверхность и притом, пользуясь математическим термином, заполняет ее повсюду плотно». Попробуем это проиллюстрировать.

## Методика расчета

Алгоритм построения магнитной линии вытекает из ее определения. Выберем произвольную точку поля с координатами $(x, y, z)$ и рассчитаем в этой точке проекции вектора индукции $B_x$, $B_y$ и $B_z$ на соответствующие оси координат. Проведем отрезок прямой от выбранной точки поля к некоторой близлежащей, смещенной на $\Delta x$, $\Delta y$ и $\Delta z$ относительно исходной. При выполнении условий $\Delta y/\Delta x = B_y/B_x$, $\Delta z/\Delta x = B_z/B_x$ мы будем перемещаться вдоль вектора $\vec{B}$, т.е. вдоль магнитной линии. Приращение одной из координат, например $\Delta x$, можно задавать произвольно, выбирая это приращение достаточно малым, а приращения двух других координат надо рассчитывать по приведенным формулам. Описанную процедуру нужно многократно повторять. При этом есть риск накопления ошибок, поэтому для проверки достоверности расчетов можно их повторять с более мелким шагом, а можно использовать специальные вычислительные схемы, компенсирующие эти ошибки, например методы Рунге–Кутты (что мы и делали, но о деталях писать здесь не будем).

Для реализации алгоритма нужно уметь рассчитывать вектор $\vec{B}$ в произвольной точке пространства для заданной системы проводников с током. В общем случае это можно сделать, используя закон Био–Савара:

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[\Delta\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3}, \qquad (1)$$

где $\Delta\vec{B}$ – магнитное поле, созданное током $I$, протекающим в бесконечно малом проводнике $\Delta\vec{l}$, в точке, положение которой определяется вектором $\vec{r}$ (в квадратных скобках стоит векторное произведение $\Delta\vec{l}$ и $\vec{r}$; рис.1), $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная. Чтобы найти магнитное поле $\vec{B}$, созданное в некоторой точке током, протекающим в проволочном контуре, необходимо воспользоваться формулой (1) и принципом суперпозиции, т.е. нужно просуммировать вклады в поле от каждого бесконечно малого фрагмента провода с током. Для прямолинейного участка проволочного контура такое суммирование можно выполнить аналитически и получить для магнитного поля в некоторой точке $A$ (рис.2) такую формулу:

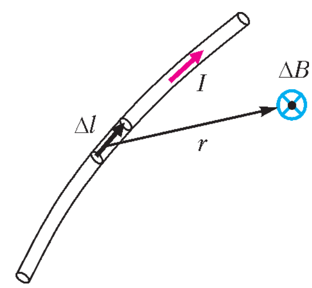



Рис.1. К закону Био–Сивара

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi x}\left(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\right), \qquad (2)$$

где расстояние $x$ и углы $\alpha_1$, $\alpha_2$ определяют положение точки $A$ относительно отрезка прямолинейного провода с током $I$.

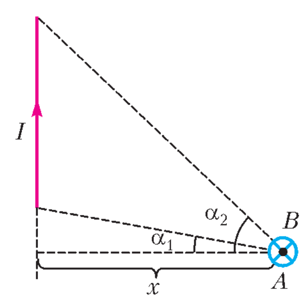



Рис. 2. К формуле для магнитного поля отрезка провода с током

Формулу (2) в наших дальнейших исследованиях мы будем использовать, во-первых, для проверки численных расчетов, выполненных при помощи формулы (1) и принципа суперпозиции, а во-вторых, для упрощения расчетов в случаях, когда система содержит прямые проводники с током.

## Замкнутые магнитные линии

Начнем с простого. На рисунках 3, 4 приведены магнитные линии поля, созданного токами в двух длинных прямых параллельных проводах. Линии являются замкнутыми кривыми, лежащими в плоскостях, перпендикулярных проводам. Направления магнитных линий указаны стрелками, а направления токов в проводах обозначены, как обычно, кружочками с точкой или перекрестием.

В случае, когда токи имеют одинаковые направления, в каждой плоскости, перпендикулярной токам, имеется одна «нулевая» точка, в которой $\vec{B} = 0$. На рисунке 3 «нулевая» точка лежит между проводами. Через эту точку проходит

[1] Лучше говорить «магнитной линией». *(Прим.ред.)*

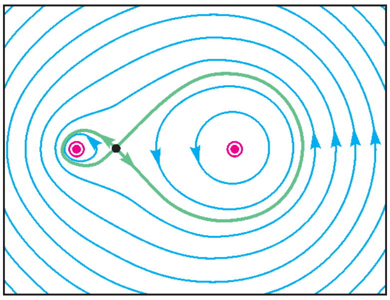


*Рис. 3. Магнитные линии токов I и 3I одного направления («на нас») в двух прямых параллельных длинных проводах*

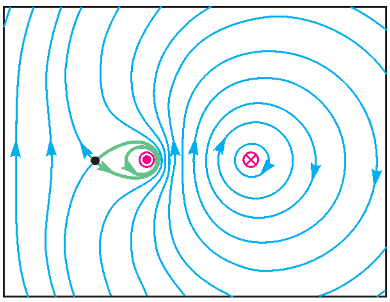


*Рис. 4. Магнитные линии токов I («на нас») и 3I («от нас») противоположных направлений в двух прямых параллельных длинных проводах*

сепаратриса – поверхность, разделяющая магнитные линии на три семейства: линии, охватывающие первый провод, охватывающие второй провод и охватывающие оба провода. На рисунке 3 виден след этой поверхности в виде восьмерки с пересечением в «нулевой» точке. В случае, когда токи имеют противоположные направления (см. рис.4), «нулевая» точка находится вне отрезка, соединяющего провода, а сепаратриса имеет форму «вывернутой» восьмерки. В обоих случаях на большом удалении от проводов направление магнитных линий определяется направлением большего по величине тока.

На рисунке 5 изображены магнитные линии поля, созданного током $I$ одного направления в двух одинаковых круговых проволочных витках, расположенных в параллельных плоскостях и имеющих общую ось. И в этом случае магнитные линии являются замкнутыми кривыми, каждая из которых целиком лежит в одной плоскости. В силу осевой симметрии, картина магнитных линий одинакова во всех плоскостях, проходящих через общую ось круговых витков. Вдали от колец магнитное поле становится таким же, как в случае одного кольца с суммарным током $2I$, а в ближней зоне на рисунке 5 видны «нулевые» точки и сепаратрисы.

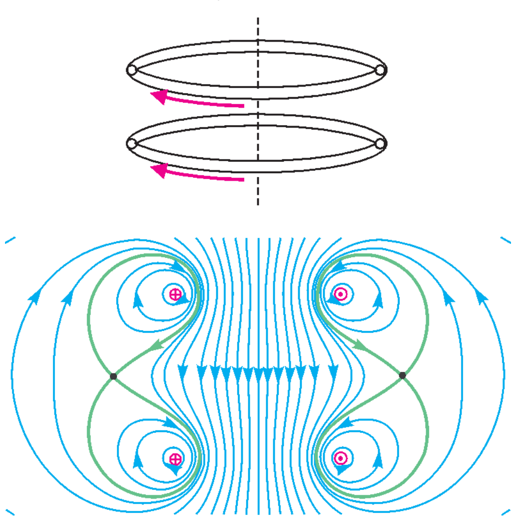


*Рис. 5. Магнитные линии токов I одного направления в двух проволочных кольцах*

Магнитные линии остаются простыми замкнутыми кривыми для изогнутого под прямым углом провода (рис.6), для Т-образного проводника (рис.7) и для треугольного контура с током (рис.8). Чтобы преодолеть трудности наглядного отображения пространственных кривых на плоском рисунке, мы подготовили для читателей компьютерные «видео-ролики», позволяющие рассматривать кривые под разными углами. [1]

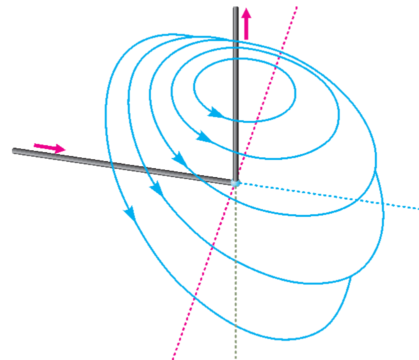


*Рис. 6. Магнитные линии провода с током, изогнутого под прямым углом*

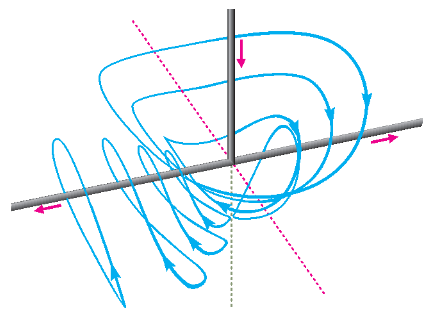


*Рис. 7. Магнитные линии для Т-образного провода с током*

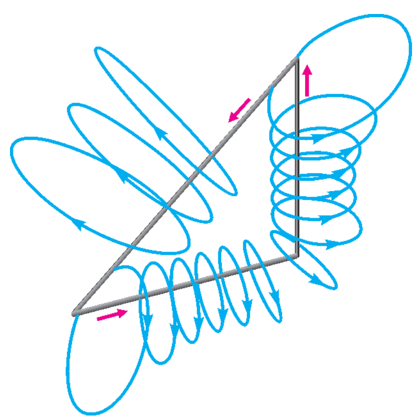


*Рис. 8. Магнитные линии треугольного контура с током*

### Винтовые и запутанные магнитные линии

До сих пор мы рассматривали случаи, когда все проводники с током лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Исследование более общего случая начнем с примера, описанного в книге И.Е.Тамма: источниками магнитного поля являются круговой виток с током и длинный прямой провод с током, проходящий через центр кругового

[1] Адрес: https://www.youtube.com/channel/UCZwl_7Qd9y_IY5jcrwOVRbA/videos

витка перпендикулярно его плоскости. На рисунке 9 показаны два семейства магнитных линий этой системы. Линии одного семейства обвивают прямой провод, а линии второго – круговой виток. Видно, что магнитные линии имеют винтовую структуру. Попробуем понять, почему это так.

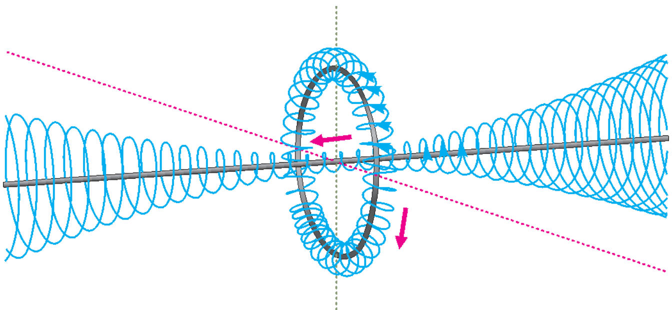


*Рис. 9. Магнитные линии в системе кругового и прямого токов*

Рассмотрим сначала магнитную линию вблизи кругового витка. Если ток в прямом проводе равен нулю, то магнитное поле создается только круговым током. Магнитные линии этого поля являются простыми петлями, навитыми на круговой виток и замыкающимися за один оборот. В другом предельном случае, когда равен нулю ток в круговом витке, источником магнитного поля является ток в прямом проводе. Магнитные линии этого поля – окружности, перпендикулярные прямому проводу. Теперь понятно, что если оба тока отличны от нуля, то магнитные линии вблизи кругового витка будут винтовыми и каждая из линий будет многократно огибать круговой виток (см. рис.9).

Интересно, что лишь в редких случаях винтовая линия замыкается, чаще всего она плотно заполняет некоторую тороидальную поверхность («бублик»), не имея ни начала, ни конца. Так, если мы из некоторой точки начнем рисовать винтовую магнитную линию, то она, совершив полный оборот вокруг прямого провода, не попадет в исходную точку. Так же будет происходить и на каждом следующем обороте. В результате получим полубесконечную винтовую линию, исходящую из заданной точки. Но аналогичным образом мы можем достроить эту магнитную линию, стартуя из исходной точки в обратном направлении. Вот и получим линию, не имеющую ни начала, ни конца и плотно заполняющую поверхность тора.

Рассмотрим теперь магнитное поле двух прямых длинных скрещивающихся под углом 90° проводов с током – эти

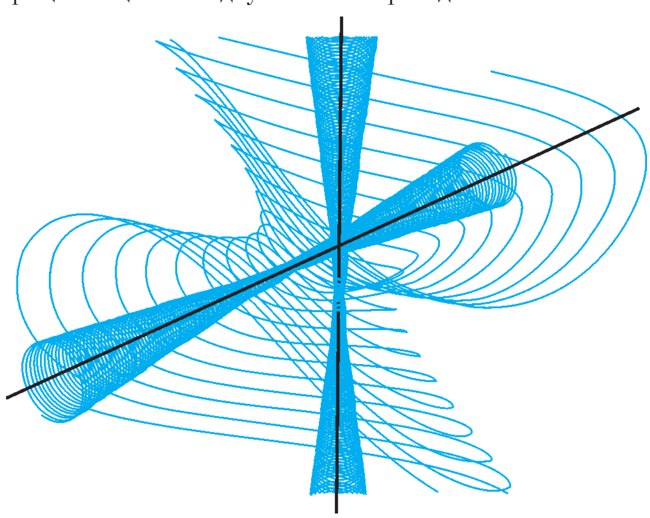


*Рис. 10. Магнитные линии двух одинаковых токов в скрещенных проводах*

провода не лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. В этом случае имеется три семейства магнитных линий (рис.10): линии, охватывающие первый провод, охватывающие второй провод и охватывающие оба провода. Все магнитные линии не замкнуты и уходят своими концами в бесконечность.

Пусть теперь у нас имеются неплоские токовые системы конечных размеров, например два взаимно перпендикулярных круговых витка с током (рис.11). Здесь картина магнитных линий радикально изменяется: она теряет ка-

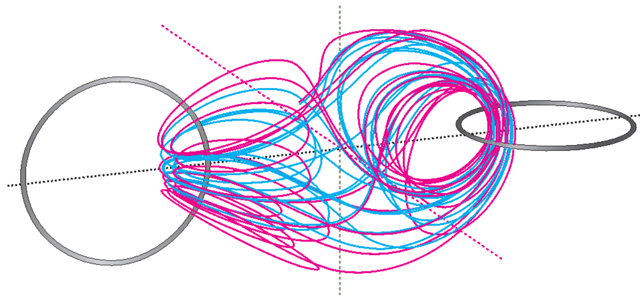


*Рис. 11. Хаотические магнитные линии*

кую-либо структуру и «запутывается». Так, если начинать строить две магнитные линии из двух близко расположенных точек, то лишь на начальном участке эти линии проходят близко друг к другу, а затем они расходятся на большое расстояние.

Такая сверхчувствительность к начальным условиям характерна для хаотических процессов: небольшие различия в начальных условиях рождают огромные различия в конечном состоянии. Теоретическое предсказание в этом случае становится невозможным. Удивительно, что хаотическое поведение магнитных линий происходит при строго определенных (детерминированных) внешних условиях, которые определяются конфигурацией проводников и токов. Подобные явления относятся к так называемому детерминированному, или динамическому, хаосу.

Хаотический характер магнитных линий не является исключением, а характерен для большинства токовых систем, и лишь в некоторых простейших случаях магнитные линии являются простыми замкнутыми кривыми. Но даже в случае простейших систем, например кругового витка с током, картина магнитных линий существенно изменяется с учетом слабого практически однородного магнитного поля Земли.

### Заключение

Завершая статью, попробуем выделить главное, что хотелось бы оставить себе «на заметку» о магнитных линиях:

- Магнитные линии не имеют истоков и стоков, однако это не означает, что магнитные линии всегда являются замкнутыми кривыми.
- Вблизи проводов магнитные линии близки к окружностям, но не обязательно геометрически точно замыкаются.
- В дальней зоне, на большом расстоянии от проводов с токами, картина магнитных линий имеет простой вид.
- В промежуточной области, при умеренных расстояниях от проводов с токами, магнитные линии часто имеют запутанный, хаотический вид и лишь в редких случаях замыкаются. При этом достаточно малого нарушения исходной симметрии, чтобы линии разомкнулись и «запутались».

# Мальчики, девочки, таблицы, графы...

Е.БАКАЕВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОПРОБУЕМ ОБЪЕДИНИТЬ В ОДИН сюжет несколько красивых комбинаторных задач.

Начнем с такой:

**Задача 1.** *В ряд стоят $m$ мальчиков и $d$ девочек в каком-то порядке. Каждого мальчика спросили, сколько справа от него стоит девочек, а каждую девочку – сколько слева от нее стоит мальчиков. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.*

**Решение.** Пусть все мальчики смотрят вправо, а все девочки смотрят влево.

Тогда если мальчик видит девочку, то эта девочка видит его. Таким образом, сумма всех чисел, названных мальчиками, и сумма всех чисел, названных девочками, это одна и та же величина: количество пар «мальчик-девочка», видящих друг друга.

Эту задачу мы встретим в основе нескольких последующих.

**Задача 2** (XXXVI Турнир городов, 2014 г.). *На столе лежала кучка серебряных монет. Каждым действием либо добавляли одну золотую монету и записывали количество серебряных монет на первый листок, либо убирали одну серебряную монету и записывали количество золотых монет на второй листок. В итоге на столе остались только золотые монеты. Докажите, что в этот момент сумма всех чисел на первом листке равнялась сумме всех чисел на втором.*

**Первое решение.** Параллельно действиям с монетами будем выписывать последовательность букв *С* и *З*: при добавлении золотой монеты будем писать букву *З*, при убирании серебряной – букву *С*. Теперь вместо подсчета монет можно считать буквы в получившейся строке.

Когда мы писали очередную букву *С*, мы записывали на листок количество золотых монет, которые уже лежали на столе, т.е. количество букв *З* слева от этой буквы *С*. А когда писали очередную *З*, то записывали на листок количество серебряных монет, которые еще лежали на столе и которые предстояло убрать, – т.е. количество букв *С* справа от этой буквы *З* в итоговой строчке.

Заменим теперь строку букв *С* и *З* на ряд из мальчиков и девочек – и получим в точности задачу 1. Осталось перефразировать ее решение: если серебряная монета посчитана при добавлении золотой, то эта золотая посчитана при убирании этой серебряной, т.е. серебряную монету убрали после того, как добавили золотую. Таким образом, сумма чисел на обоих листках – количество таких пар «серебряная монета – золотая монета», которые в какой-то момент обе находились на столе.

**Второе решение.** Рассмотрим координатную плоскость, на которой вертикальная ось соответствует количеству серебряных монет, а горизонтальная – количеству золотых. Каждой целочисленной точке, лежащей в прямоугольнике $S \times G$ (где $S$ и $G$ – наибольшее возможное количество серебряных и золотых монет соответственно), соответствует возможное положение на столе (количество серебряных и золотых монет) (рис.1). С каждым действием точка, соответствующая текущему положению, сдвигается либо на единичный отрезок вниз (когда убираем серебряную монету), либо на единичный отрезок вправо (когда добавляем золотую), начальному положению соответствует точка $(0,\ S)$ на вертикальной оси, а конечному – $(G,\ 0)$ на горизонтальной (рис.2).

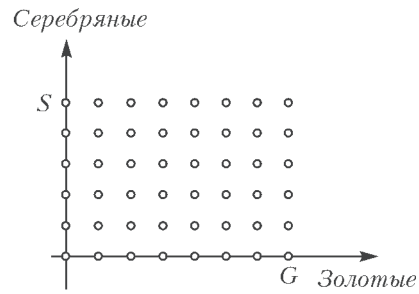



Рис. 1

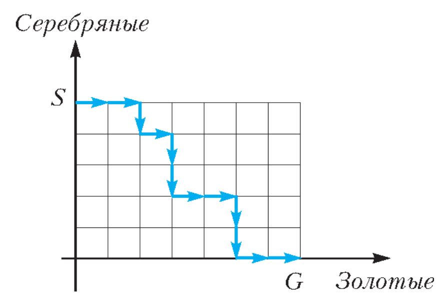



Рис. 2

Когда мы идем из точки $(x,\ y)$ вправо по отрезку, первая координата увеличивается, а мы записываем на первый листок $y$, т.е. количество клеток под этим отрезком. Аналогично, когда мы идем из $(x,\ y)$ вниз, то записываем на второй листок $x$ – количество клеток слева от отрезка. Выходит, мы учтем каждую клетку под ломаной дважды: один раз на первом листке, когда будем проходить над ней, и один раз на втором листке, когда будем проходить справа от нее (рис.3). Значит, суммы чисел на листках будут одинаковыми и будут равны количеству клеток под ломаной.

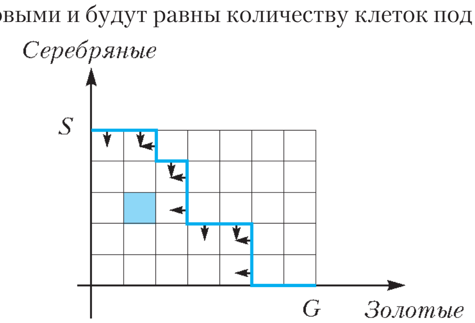



Рис. 3

Основная идея второго решения – рассмотрение множества всех возможных положений системы, в этой статье мы воспользуемся этим приемом еще не раз. В математике такое множество называют *фазовым пространством* системы. (Но обычно этот термин употребляется в другом контексте.)

**Задача 3.** *В ряд стоят $m$ мальчиков и $d$ девочек в каком-то порядке. Каждого ребенка спросили, сколько слева от него стоит детей другого пола. Чему равна сумма чисел, названных детьми?*

**Ответ:** $md$.

**Первое решение.** Рассмотрим произвольную пару «мальчик-девочка». Если мальчик стоит левее девочки, то девочка его посчитала, а он ее – нет. А если правее – то наоборот: он посчитал ее, а она его – нет. Таким образом, каждая пара посчитана либо только мальчиком этой пары, либо только девочкой, т.е. ровно один раз. А число таких пар – $md$.

**Второе решение.** Пусть дети стоят не просто так, а в очереди на вход в школьный кабинет, причем начало очереди находится слева. Дети будут по одному заходить в кабинет, и каждый при входе будет отвечать на вопрос «Сколько сейчас в кабинете детей другого пола?» (ведь в кабинете находятся те, кто стоял слева от него).

Как и во втором решении предыдущей задачи, рассмотрим множество всех возможных положений. Положение задается точкой с двумя координатами: количеством мальчиков в кабинете (будем откладывать на горизонтальной оси) и количеством девочек в кабинете (на вертикальной оси).

Сначала мы находились в точке (0, 0), а в итоге пришли в точку $(m, d)$. Когда входит мальчик, мы сдвигаемся из точки $(x, y)$ на единичный отрезок вправо, и к этому моменту в кабинете уже находятся $y$ девочек, что равно количеству клеток под отрезком.

А когда входит девочка, – сдвигаемся из точки $(x,y)$ на единичный отрезок вверх, и девочка называет число $x$, т.е. количество клеток слева от отрезка (рис.4).

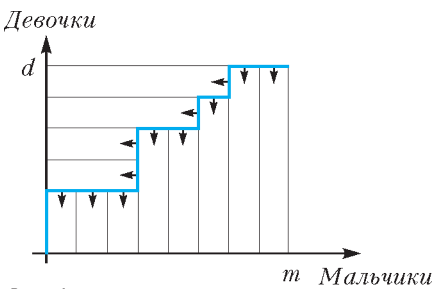



Рис. 4

Таким образом, прямоугольник $m \times d$ окажется разрезанным на полоски, каждая девочка посчитала клетки своей горизонтальной полоски, каждый мальчик – своей вертикальной. Значит, сумма всех ответов равна $md$.

**Упражнения**

**1.** На доске написаны два натуральных числа $x$ и $y$. Вася записывает на бумажку одно из этих чисел, а на доске уменьшает другое число на 1. С новой парой чисел на доске он снова проделывает ту же операцию и т.д. до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Васиной бумажке?

**2** (Е.Горский, XXVIII Турнир городов, 2006 г.). На доске написаны в порядке возрастания два натуральных числа $x$ и $y$ ($x \le y$). Петя записывает на бумажке $x^2$ (квадрат первого числа), а затем заменяет числа на доске числами $x$ и $y - x$, записывая их в порядке возрастания. С новыми числами на доске он снова проделывает ту же операцию и так далее до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

**3** (Е.Горский, С.Дориченко, XXVIII Турнир городов, 2006 г.). На доске написаны три натуральных числа $a$, $b$, $c$. Петя записывает на бумажку произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

**Задача 4** (XXXVI Турнир городов, 2014 г.). *С начала учебного года Андрей записывал свои оценки по математике. Получая очередную оценку (2, 3, 4 или 5), он называл ее неожиданной, если до этого момента она встречалась реже каждой из всех остальных возможных оценок. (Например, если бы он получил с начала года подряд оценки 3, 4, 2, 5, 5, 5, 2, 3, 4, 3, то неожиданными были бы первая пятерка и вторая четверка.) За весь учебный год Андрей получил 40 оценок – по 10 пятерок, четверок, троек и двоек (неизвестно, в каком порядке). Можно ли точно сказать, сколько оценок были для него неожиданными?*

В предыдущих задачах речь шла о последовательностях элементов двух типов (два вида монет, два пола детей), здесь же оценок 4 вида. Поэтому давайте решим сначала более простую версию этой задачи – когда Андрей получал только два вида оценок – двойки и пятерки, по 10 оценок каждого вида.

Снова рассмотрим множество всех возможных положений. Каждому положению поставим в соответствие точку с двумя координатами: количеством двоек (на горизонтальной оси) и количеством пятерок (на вертикальной оси).

Таким образом, получая очередную оценку, мы сдвигаемся на единичный отрезок вправо или вверх, в итоге пройдя из точки (0, 0) в точку (10, 10). Выделим голубым цветом отрезки, которые соответствуют неожиданным оценкам (рис.5).

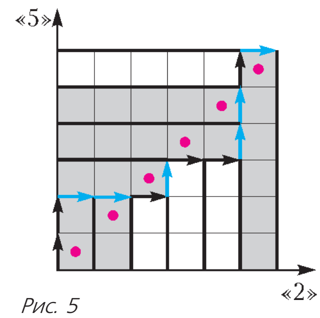



Рис. 5

Заметим, что горизонтальные голубые отрезки расположены над диагональными клетками, а вертикальные – справа от диагональных клеток. (Докажите, что это верно для любой последовательности получения двоек и пятерок.)

Разобьем квадрат $10 \times 10$ на полоски, как в решении предыдущей задачи. Оценка будет неожиданной тогда и только тогда, когда в соответствующей ей полоске будет диагональная клетка. Значит, всего неожиданных оценок столько же, сколько клеток на диагонали, т.е. 10.

Аналогичное рассуждение помогает и в том случае, когда видов оценок не два, а три или четыре, с той разницей, что речь в нем пойдет не о разрезании квадрата, а о распиливании трехмерного и четырехмерного кубов. В данном случае нельзя сказать, что наш прием задачу упростил – наглядной такую интерпретацию назвать сложно... Но всегда полезно знать несколько решений одной задачи, – это помогает лучше в ней разобраться. А теперь приведем более естественное и наглядное решение.

**Решение.** Рассмотрим «первые» оценки – первую двойку, первую тройку, первую четверку и первую пятерку. Первой неожиданной оценкой будет та из этих четырех оценок, которая получена позже других. Аналогично, второй неожиданной оценкой будет та из четырех «вторых» оценок, которая получена позже остальных, и т.д. Значит, всего будет 10 неожиданных оценок. Можно проиллюстрировать это решение так. Рассмотрим прямоугольник $10 \times 4$, в которой столбцы соответствуют оценкам «2», «3», «4», «5» (рис.6). Когда Андрей получает оценку, будем закрашивать клетку в столбце, соответствующем этой оценке, причем закрашиваем самую нижнюю из еще не закрашенных клеток в этом столбце. Тогда неожиданная оценка соответствует клетке, которая закрашивается в своей стро-

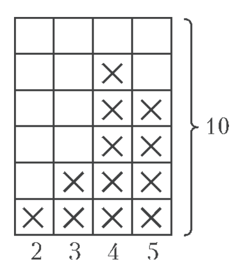



Рис. 6

ке последней (ясно, что в каждой строке будет ровно одна такая клетка).

**Упражнение 4** (И.Изместьев, Всероссийская олимпиада по математике, 1998 г., 4 этап). В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

**Задача 5** (И.Богданов, Московская математическая олимпиада, 2014 г.). *В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашки. Найдите такое минимальное $k$, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять $k$ белых и $k$ фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.*

В предыдущих задачах речь шла о процессе, и мы следили за тем, как его параметры меняются со временем. В условии этой задачи не задан процесс, положения которого мы описали бы множеством точек на плоскости. Но, как и в предыдущих двух задачах, речь идет о последовательностях из элементов двух видов: в задаче 2 это были серебряные и золотые монеты, в задаче 3 – мальчики и девочки, здесь – белые и фиолетовые рубашки. Так что попробуем использовать аналогичную наглядную интерпретацию. Поставим точку в начало координат; затем пойдем вдоль ряда рубашек: если очередная рубашка белая – сдвигаем точку на единичный отрезок вверх, если фиолетовая – вправо. Получится ломаная. Переформулируем исходную задачу так, чтобы теперь это была задача про ломаную.

В ряду 21 белая и 21 фиолетовая рубашка – значит, наша ломаная состоит из 21 горизонтального и 21 вертикального отрезков, т.е. соединяет противоположные вершины квадрата $21 \times 21$. Теперь разберемся, как меняется ломаная, когда мы убираем рубашки из ряда. Уберем одну фиолетовую рубашку – один горизонтальный отрезок ломаной пропадет. Можно представить, что мы выкинули из квадрата весь столбец, в котором лежит этот отрезок, и теперь ломаная соединяет вершины прямоугольника $20 \times 21$ (рис.7). И так далее – с каждой убранной рубашкой будем выкидывать весь столбец или строку прямоугольника. В конце останется $m = 21 - k$ белых рубашек и столько же фиолетовых, причем

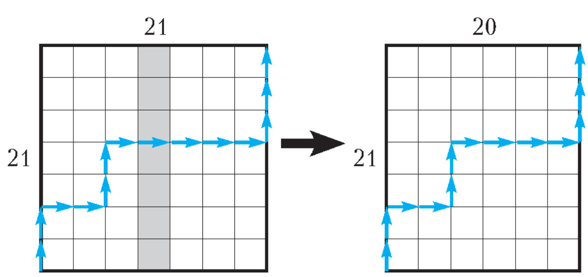



Рис. 7

сначала должны идти рубашки одного цвета, затем другого. Значит, в ломаной сначала будут идти $k$ отрезков одного направления, затем другого – т.е. она будет ограничивать квадрат со стороной $m$ (над собой или под собой; рис.8). Иными словами, выкидыванием строчек и столбцов мы должны добиться того, чтобы или фигура над ломаной, или фигура под ломаной превратилась в квадрат со стороной $m$. Несложно понять, что это можно сделать в том и лишь в том случае, когда такой квадрат можно было вырезать в самом начале – либо из фигуры над ломаной, либо из фигуры под ломаной. Итак, задача обрела такой вид:

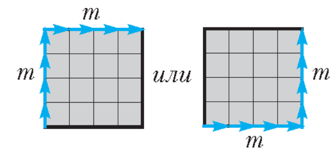



Рис. 8

*Квадрат $21 \times 21$ разрезали ломаной, идущей по границам клеточек из левого нижнего угла в противоположный, смещаясь только вправо и вверх. Квадрат какого наибольшего размера $m$ гарантированно можно вырезать из одной из двух получившихся частей?*

После такой переформулировки задача становится простой: квадрат $11 \times 11$ точно будет в одной из частей – в той, в которой окажется центральная клетка квадрата $21 \times 21$. При этом если разрез пройдет по границе центральной клетки, то квадрат $12 \times 12$ вырезать будет невозможно (рис.9). Поэтому ответ в этой задаче: $m = 11$. Значит, в исходной задаче ответ $k = 21 - m = 10$.

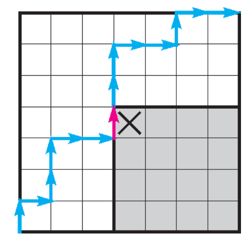


Рис. 9

Задача решена, но порассуждаем еще немного.

Рассмотрим положения, выделенные голубой линией (рис.10). Это множество положений, когда рубашек одного цвета ровно 11, а другого меньше 11. Мы попадем в одно из них, потому что не сможем обойти образованную ими «стену».

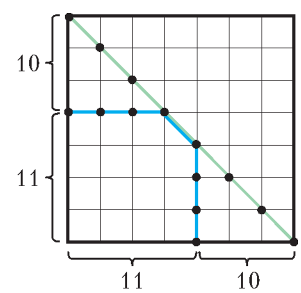



Рис. 10

Если мы попадем на правую сторону стены, значит, верхний левый квадрат $11 \times 11$ ломаная не заденет – он окажется над ломаной. Аналогично, если мы попадем на верхнюю сторону этой стены, то нижний правый квадрат $11 \times 11$ будет под ломаной.

Переведем решение задачи на тот язык, на котором она сформулирована, – не упоминая диаграммы и ломаные.

**Решение.** Итак, рассмотрим наш ряд рубашек. Будем идти вдоль ряда рубашек и считать, сколько рубашек каждого цвета мы прошли. Когда рубашек какого-то из цветов впервые станет 11, остановимся. Рубашек другого цвета мы прошли не больше 10, значит, перед нами еще хотя бы 11 рубашек другого цвета. Эти 11 рубашек и те 11, после которых мы остановились, оставим, а остальные 10 белых и 10 фиолетовых снимем. Следовательно, $k$, равного 10, нам хватит.

Мы уже знаем, что $k < 10$ может не хватить – для этого нужно, чтобы ломаная касалась центрального квадратика (см. рис. 9). Значит, $k$ равно как минимум 10 для любого ряда рубашек, в котором среди первых 21 рубашки – 10 белых и 11 фиолетовых или, наоборот, 11 белых и 10 фиолетовых.

**Упражнения**

**5.** Можно рассматривать и другую «стену»: например, положения, лежащие на зеленой линии (см. рис.10). Решите задачу с помощью «зеленой стены» и переведите решение на язык условия задачи.

**6.** В ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашки. Петя хочет снять несколько рубашек так, чтобы слева направо шли $p$ белых, затем $q$ фиолетовых. А Вася – так, чтобы слева направо шли $22 - q$ фиолетовых, затем $22 - p$ белых. Докажите, что при любом расположении рубашек из этих желаний осуществимо ровно одно.

* * *

Выше мы много раз интерпретировали задачу как подсчет клеток на прямоугольном поле. Но прямоугольную таблицу, в которой часть клеток отмечена, можно воспринимать как частный случай графа (это двудольный граф: вершины одной доли соответствуют строкам, вершины другой – столбцам, а клетка на пересечении строки и столбца отмечена тогда и только тогда, когда проведено ребро между двумя соответствующими вершинами). Соответственно, вместо рассмотрения таблицы бывает удобно рассмотреть двудольный граф и наоборот.

**Упражнение 7.** Сформулируйте решение упражнения 1 в терминах графов.

Таким образом, идея в более общем виде – это подсчет ребер некоторых графов разными способами.

Мы завершим рассказ одной из ярких задач, в которой помогает эта идея.

**Задача 6** (А.Меркурьев, Санкт-Петербургская олимпиада, 1986 г.). *В куче 1001 камень. Ее произвольно делим на две кучи, подсчитываем количества камней в них и записываем произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделываем ту же операцию: делим на две и записываем произведение чисел камней в двух вновь образованных кучах. Затем ту же операцию повторяем с одной из трех полученных куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равна сумма 1000 записанных произведении?*

**Решение.** Рассмотрим граф на 1001 вершине или, проще говоря, отметим 1001 точку. Пусть две вершины соединены ребром в том случае, когда они лежат в одной куче. Сначала любые две вершины соединены (иначе говоря, граф является полным). Когда мы делим кучу из $a + b$ камней на две кучи из $a$ и $b$ камней, то записываем число $ab$, которое как раз равно количеству ребер, пропадающих из-за того, что $ab$ пар камней перестало лежать в одной куче. Таким образом, сумма чисел равна количеству ребер, которые пропадают после операции. Но, с другой стороны, рано или поздно будут стерты все ребра полного графа, значит, сумма записанных чисел будет равна

$$C_{1001}^2 = \frac{1001 \cdot 1000}{2} = 500500.$$

Задача решена. Как видим, решение этой задачи излагать в терминах графов наиболее естественно. Но можно и здесь рассмотреть таблицу $n \times n$ (где $n$ – количество вершин), в которой отмечено, какие вершины с какими соединены. В такой таблице на главной диагонали нет отмеченных клеток (так как вершины не соединяются сами с собой), кроме того, она симметрична относительно этой диагонали (так как если из вершины $A$ ведет ребро в вершину $Б$, то это же ребро ведет из вершины $Б$ в вершину $A$). Поэтому можно оставить только клетки под диагональю. Получится «лестница» из $n - 1$ ступенек (рис.11), каждая клетка которой соответствует ребру полного графа на $n$ вершинах.

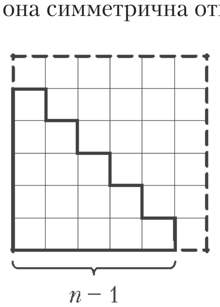



Рис. 11

**Упражнение 8.** Изложите решение задачи 6 в терминах подсчета числа клеток в этой лестнице.

## Задачи для самостоятельного решения

**7** (XXXIV Турнир городов, 2013). Двадцать детей – десять мальчиков и десять девочек – встали в ряд. Каждый мальчик сказал, сколько детей стоит справа от него, а каждая девочка – сколько детей стоит слева от нее. Докажите, что сумма чисел, названных мальчиками, равна сумме чисел, названных девочками.

**8** (В.Произволов, М1879). На левую и правую чашки весов положили по 100 гирек из набора 1 г, 2 г, 3 г, …, 200 г. *Значимостью* гирьки с какой-либо чашки назовем количество тех гирек другой чашки, которые легче ее. Докажите, что весы покажут равновесие тогда и только тогда, когда сумма значимостей гирек левой чашки равна сумме значимостей гирек правой чашки.

**9** (А.Шаповалов, IV Турнир памяти А.П.Савина, 1998 г.). В клетчатом квадрате $6 \times 6$, вначале пустом, Саша закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку количество граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел в них будет равна 60.

**10** (А.Эвнин, XXXIV Турнир городов, 2012 г.). Таблица $10 \times 10$ заполняется по правилам игры «Сапер»: в некоторые клетки ставят по мине, а в каждую из остальных клеток записывают количество мин в клетках, соседних с данной клеткой (по стороне или вершине). Может ли увеличиться сумма всех чисел в таблице, если все «старые» мины убрать, во все ранее свободные от мин клетки поставить мины, после чего заново записать числа по правилам?

**11.** Сначала в каждой клетке таблицы $10 \times 10$ было записано число 10. Каждый раз выбирается какая-то клетка, на листок записывается

а) количество соседних (по стороне) клеток, в которых стоит число не меньшее, чем в выбранной;

б) сумма чисел в соседних (по стороне) клетках;

после чего число в выбранной клетке уменьшается на 1.

Какой может быть сумма всех чисел на листке, когда все числа в таблице станут нулями?

**12** (XXI Турнир памяти А.П.Савина, 2015 г.). У каждого из 16 детей было по 8 конфет. Каждую минуту один из детей платит в кассу столько рублей, у скольких детей конфет не меньше, чем у него, а затем съедает одну свою конфету. Сколько денег может оказаться в кассе, когда все конфеты будут съедены?

**13** (XXI Турнир памяти А.П.Савина, 2015 г.). На доске написано несколько натуральных чисел. Каждую минуту Ваня выбирает какое-нибудь число и записывает на листок бумаги произведение всех остальных чисел, после чего выбранное число уменьшает на 1. Когда все числа на доске станут нулями, Ваня сложит все числа на листке. Докажите, что сумма, которая у него получится, не зависит от порядка, в котором он будет выбирать числа.

**14** (XXI Турнир памяти А.П.Савина, 2015 г.). Каждый раз одну из куч камней делят на две и записывают число $ab(a + b)$, где $a$ и $b$ – количества камней в двух новых кучках. Сначала была одна куча из $N$ камней, а в конце остались только кучи из одного камня. Чему может быть равна сумма записанных выражений?

**15** (И.Изместьев, Всероссийская олимпиада по математике, заключительный этап, 1995 г.). Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

*Примечание.* Автор всех задач этой статьи, где не указано иное, – Е.Бакаев.

# Каких больше – острых или тупых?

Г.КОРБУЛОН

Как-то подбегает ко мне мой ребенок и спрашивает: каких больше – острых или тупых?!

Он имел в виду треугольники – остроугольные и тупоугольные. А в самом деле, каких треугольников на свете больше и во сколько раз? Ясно, что и тех и других можно построить бесконечно много. Несмотря на это, давайте попробуем подумать над этим вопросом.

**Способ 1 (выбираем стороны).** Можно считать так. Взять три отрезка случайной длины и попробовать из них сложить треугольник – для этого нужно, чтобы длина самого длинного из них была все же меньше, чем сумма двух оставшихся. Чтобы не возиться с сантиметрами и футами или парсеками с ангстремами, за единицу длины возьмем длину самого длинного отрезка. Тогда длины двух оставшихся отрезков ($x$ и $y$) будут числами меньше единицы, а условие, что из этих отрезков можно сложить треугольник, запишется так: $x + y > 1$. Если отложить $x$ и $y$ по осям, то диагональ квадрата $x + y = 1$ (красная линия) разделит его пополам (рис. 1), т.е. в половине возможных случаев из трех случайно взятых отрезков нельзя вообще сложить треугольник.

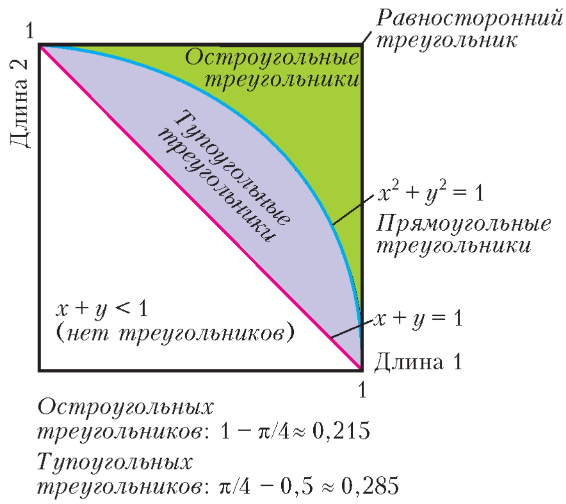



Рис. 1

Если учесть, что у прямоугольных треугольников $x^2 + y^2 = 1$ (дуга окружности, синяя линия), получим области «острых» и «тупых» треугольников. Площадь фиолетового сегмента равна $\frac{\pi}{4} - 0{,}5 \approx 0{,}285$, а площадь зеленой области равна $1 - \frac{\pi}{4} \approx 0{,}215$. По площади видно, что «тупых» около 57 процентов, т.е. в 1,325 раз больше, чем «острых».

**Способ 2 (выбираем углы).** Но ведь можно брать не три отрезка, а три угла и собирать треугольники из них. Однако три угла должны в сумме давать $\pi$, т.е. $180°$. Итак, треугольник с углами $x$, $y$, $z$ существует тогда и только тогда, когда $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ и $x + y + z = \pi$. В координатном пространстве эти условия задают внутренность правильного треугольника, выделенного на рисунке 2 красными линиями (это сечение первого квадранта плоскостью $x + y + z = \pi$).

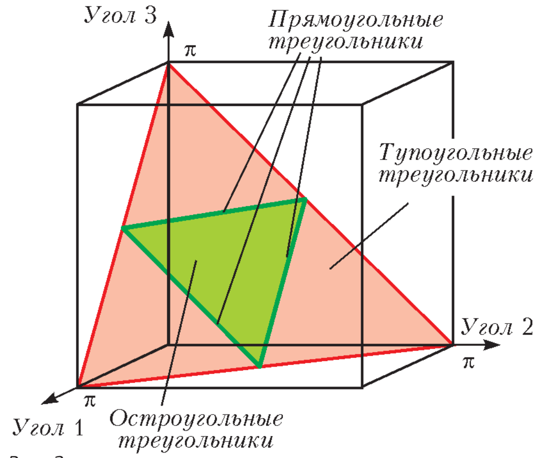



Рис. 2

Дополнительные условия остроугольности $x < \pi/2$, $y < \pi/2$, $z < \pi/2$ означают, что точка $(x, y, z)$ попадает внутрь маленького зеленого треугольничка с вершинами в серединах красных отрезков. Тогда «тупых», как показывает рисунок, 75 процентов, т.е. в три раза больше, чем «острых».

**Способ 2′ (дуги).** Нарисуем окружность $s$. Так как любой треугольник подобен некоторому треугольнику, вписанному в эту окружность, ограничимся рассмотрением только треугольников, вписанных в $s$. Три случайно выбранные точки на окружности $s$ задают треугольник. Какова вероятность, что он остроугольный?[1]

Пусть три точки делят окружность $s$ на дуги величиной $x$, $y$ и $z$, где $x + y + z = 2\pi$. Треугольник будет остроугольным при выполнении условий $x < \pi$, $y < \pi$, $z < \pi$. Все устроено абсолютно так же, как в предыдущей попытке в углами. Это и понятно – вписанный угол вдвое меньше меры дуги, на которую опирается.

**Способ 3 (отмечаем вершины).** Посмотрим на вопрос иначе. Можно зафиксировать на плоскости две из трех вершин треугольника. А третью вершину будем выбирать случайным образом и смотреть, как часто тройка вершин будет образовывать острые и тупые треугольники. Пусть

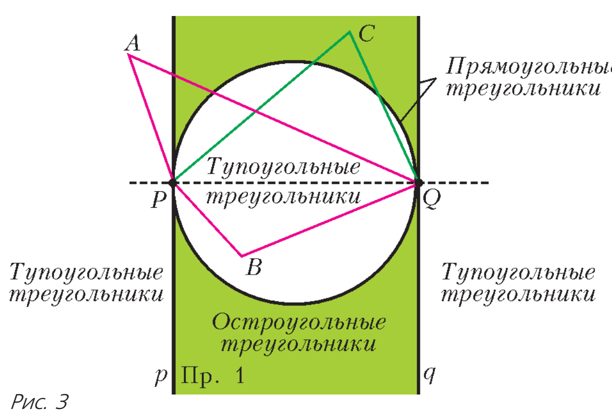



Рис. 3

[1] В такой формулировке задача рассматривалась в замечательной статье Н.Васильева «Геометрические вероятности» («Квант» №1 за 1991 г.). Там же приводятся два решения: одно идейно близкое к изложенному во второй попытке, другое – изящное, позволяющее решить и обобщение данной задачи про вписанные многоугольники, содержащие центр описанной окружности.

фиксированные точки – $P$ и $Q$ (рис.3). Через $P$ и $Q$ проведем прямые $p$ и $q$, перпендикулярные прямой $PQ$.

Точки $A$, лежащие вне полосы между прямыми $p$ и $q$, дадут «тупые» треугольники: угол $APQ$ либо $AQP$ тупой. Тот же результат получится для точек $B$ внутри окружности, построенной на $PQ$ как на диаметре: здесь тупым будет

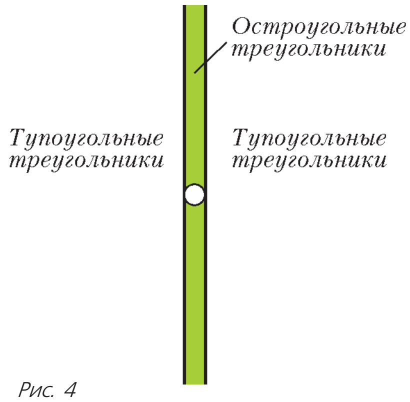



Рис. 4

угол $PBQ$. «Острые» же треугольники дадут только те точки (как точка $C$ на рисунке), которые попадают в выделенную зеленым цветом область. Слева и справа от полосы, а также внутри круга, треугольники «тупые». Если посмотреть на картинку с огромного расстояния, когда зеленая область превратится в исчезающе тонкую полосочку, а слева и справа от нее все будет белым, то станет понятно, что «тупых» треугольников намного больше (рис.4). Если смущает бесконечная область для выбора третьей вершины треугольника, можно выбирать ее, например, лишь из круга большого радиуса $R$. При увеличении $R$ доля «тупых» будет стремиться к 100 процентам…

**Способ 4 (человеческий фактор).** А теперь без математики. Просто попросим 100 человек (или все человечество) нарисовать треугольник и подсчитать, сколько из них «тупых», а сколько «острых». Нетрудно догадаться, что тут «острые» наконец-то получат преимущество. Если взять все треугольники с картинок из книг для маленьких детей, где рассказывают о разных фигурах, и из всех учебников по геометрии для старшеклассников, то кажется, что «острые» опять одерживают уверенную победу. В нашей последней попытке и правильные, и прямоугольные посоревнуются с тупоугольными (подумайте, каков был бы результат этого соревнования в первых трех попытках)!

Итак, **у нас ЧЕТЫРЕ разных ответа** (читатель может придумать и другие способы ответа на вопрос об «острых» и «тупых»). В трех попытках лидируют «тупые», правда с разным преимуществом: и на 30%, и в 3 раза, и даже в бесконечно большое число раз. Как такое могло произойти? Ведь мы, кажется, не допускали ошибок в рассуждениях? Предлагаем читателю подумать над этим вопросом, прежде чем читать приведенное ниже объяснение.

### Объяснение от редакции

Один и тот же вопрос (например, вопрос, рассматриваемый в статье) может быть разными способами интерпретирован в терминах вероятности – можно строить разные *вероятностные пространства*. (Это происходит в классическом «парадоксе Бертрана» при подсчете вероятности того, что длина случайной хорды окружности единичного радиуса больше $\sqrt{3}$; см. например, упомянутую статью Н.Васильева «Геометрические вероятности» в «Кванте» №1 за 1991 г.).

Проанализируем, например, второй способ выбора треугольника. В нем негласно предполагалось, что значения углов треугольников *распределены равномерно*, т.е., скажем, вероятность выбрать треугольник с двумя меньшими углами из интервалов $(1°, 2°)$ и $(30°, 33°)$ предполагается равной вероятности выбрать треугольник с двумя меньшими углами из интервалов $(10°, 11°)$ и $(40°, 43°)$. Это условие не будет выполняться для первой и третьей попыток! И различие в ответах закономерно.

Вероятностное пространство – не просто абстракция. Оно может являться моделью для вполне конкретной практической серии испытаний. Например, закрутим волчок со стрелкой (как в игре «Что? Где? Когда?») и проведем прямую, параллельную конечному положению стрелки. Так поступим три раза, и в результате получим треугольник (почти всегда!) в пересечении трех проведенных прямых (будем избегать пересечения прямых в одной точке). Это испытание вполне соответствует модели, описанной во втором способе.

А вот третий способ, строго говоря, нереализуем. В наших рассуждениях мы неявно предполагали, что вероятность пропорциональна площади. Это значит, что вероятность для точки $A$ попасть, скажем, в квадрат единичного размера должна быть одной и той же, где бы на плоскости ни был расположен этот квадрат. Но тогда эта вероятность не может равняться положительному числу – иначе мы разобьем плоскость на квадраты и получим, что вероятность для точки $A$ просто оказаться на плоскости равна бесконечности – а должна равняться 1. Остается единственная возможность – вероятности попадания в любой единичный квадрат равна 0. Но тогда, аналогично, и вероятность для точки $A$ просто оказаться на плоскости тоже равна 0 – снова противоречие. Так что надо отказываться либо от всего этого способа, либо от требования «равноправия» точек – и, например, строить вероятностное пространство так, чтобы вероятность попасть в «далекие» квадраты была меньше, чем в «ближние».

Отметим, что в четвертом способе представлена не математическая модель, а пример реальной серии испытаний. Как создать правильную модель по статистическим данным реального процесса – задача обычно сложная. Однако для практически значимых вопросов очень важно иметь правильную модель, так как она дает основания для верных выводов и прогнозов. Раздел математики, в котором решаются задачи такого сорта, называется математической статистикой.

# Кинематика отрезка

Е.СОКОЛОВ

*Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.*

Козьма Прутков. Плоды раздумья

Школьная кинематика – это кинематика материальной точки. Даже если в условии задачи говорится о пешеходах, машинах или самолетах, мы, приступая к решению, тут же превращаем их в материальные точки. Вот и получается, что материальная точка – главный объект школьной кинематики.

Но в задачах встречаются не только точки. Существуют еще, например, отрезки. Они тоже могут двигаться – перемещаться и поворачиваться. А еще они могут (и это уже нечто новое) растягиваться, сокращаться или же упорно сохранять свою длину. И каждое такое движение отрезка может стать предметом задачи. Поэтому, например, идя на олимпиаду, полезно познакомиться с *кинематикой отрезка*. Причем часто ни про отрезки, ни про материальные точки в условиях задач не говорится. Мы должны сами увидеть эти объекты, которые прячутся от нас за разными словами. Например, так.

**Задача 1.** *Колонна машин длиной $l_0 = 600$ м движется по грунтовому участку дороги со скоростью $v_{гр} = 15$ м/с. Въезжая на асфальтированный участок, каждая машина увеличивает свою скорость до $v_{асф} = 20$ м/с (рис.1,а). Какой будет длина колонны, когда все машины въедут на асфальтированный участок?*

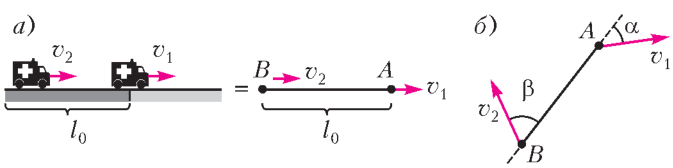



Рис. 1

Для начинающих условие этой задачи во многом загадочно: «Разве длина колонны может изменяться, как это возможно да и вообще что такое колонна?» Все становится простым и ясным, если на последний вопрос дать такой ответ: «Колонна – это отрезок, соединяющий первую и последнюю машины». Тогда длина колонны – это расстояние между первой и последней машинами. И, конечно, она изменяется тогда, когда скорости этих машин разные.

Уяснив это, приступаем к знакомству с главной формулой кинематики отрезка – формулой для скорости изменения длины отрезка. *Скорость изменения длины отрезка* мы определим таким образом:

$$u = \frac{\Delta l}{\Delta t},$$

где $l$ – длина отрезка. Понятно, что $u$ зависит от скоростей его крайних точек (рис.1,*б*). Так вот, главная формула кинематики отрезка связывает скорость изменения его длины со скоростями его крайних точек:

$$u = v_1 \cos\alpha - v_2 \cos\beta .$$

Доказать эту замечательную формулу вы можете самостоятельно. А мы приступаем к практической работе с ней.

### Один отрезок

Испробуем сначала нашу формулу на задаче 1.

**Решение задачи 1.** Длина отрезка-колонны начнет изменяться с того момента, как только первая машина въедет на хороший участок дороги и ее скорость увеличится. Скорость изменения длины этого отрезка будет равна

$$u = v_{асф} - v_{гр} .$$

Отрезок будет удлиняться с этой скоростью до тех пор, пока последняя машина не въедет на асфальтированный участок, т.е. в течение времени $\Delta t = l_0/v_{гр}$ . Всего отрезок удлинится на

$$\Delta l = u\Delta t = \frac{\left(v_{асф} - v_{гр}\right)}{v_{гр}} l_0 ,$$

и его длина окажется равной

$$l = l_0 + \Delta l = \frac{v_{асф}}{v_{гр}} l_0 = 800 \text{ м} .$$

А теперь – классическая задача про черепах.

**Задача 2.** *Три черепахи находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a = 1{,}8$ м (рис.2). По сигналу каждая черепаха начинает ползти в направлении своей соседки со скоростью $v = 0{,}5$ см/с. Через какое время черепахи встретятся?*

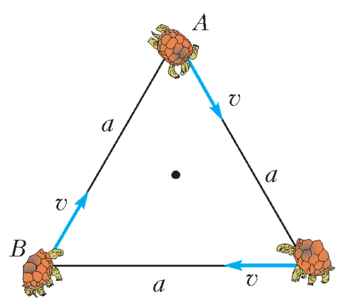



Рис. 2

**Решение.** Понятно, что, во-первых, в силу симметрии в своем движении черепахи всегда будут оставаться в вершинах равностороннего треугольника, а во-вторых, в момент встречи сторона этого треугольника станет равной нулю. Эти догадки указывают нам путь к решению.

Применим нашу формулу к одной из сторон «треугольника черепах», например к отрезку $AB$. Для него (см. рис.1,*б*) $\alpha = 120°$ , $\beta = 0$ , так что смещения обеих черепах приводят к уменьшению стороны треугольника. Скорость уменьшения длины отрезка $AB$ равна

$$|u| = |v\cos 120° - v\cos 0| = \frac{3}{2}v .$$

Для того чтобы его длина обратилась в ноль (черепахи встретились), необходимо время

$$t = \frac{a}{|u|} = \frac{2a}{3v} = 240 \text{ с} = 4 \text{ мин} .$$

Следующая задача – настоящая олимпиадная.

**Задача 3.** *Легкий диск радиусом $R = 8$ см подвешен на оси, проходящей на расстоянии $a = 4$ см от его центра (рис.3,а). В нижнюю точку диска A садится тяжелый жук и начинает ползти по краю диска со скоростью $v = 12$ мм/мин на противоположный край диска, в точку B. Через какое время жук наберет максимальную скорость относительно неподвижной системы отсчета? Чему она будет равна? Чему будет равна скорость жука относительно неподвижной системы координат в тот момент, когда он проползет половину пути?*

**Решение.** Так как по условию задачи жук гораздо тяжелее диска, то при движении он все время остается под точкой

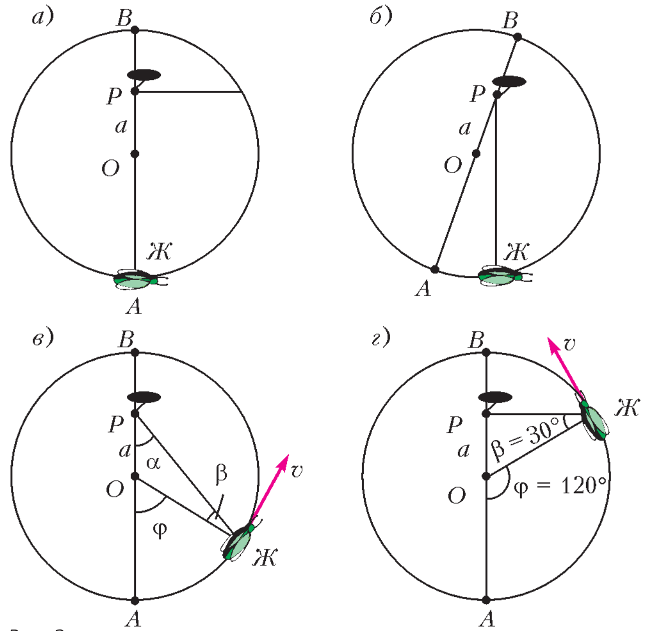


Рис. 3

подвеса. Поэтому в неподвижной системе координат его движение представляет подъем по вертикальной линии вверх (рис.3,*б*), а его скорость есть скорость уменьшения длины отрезка *РЖ*.

Для вычисления этой скорости рассмотрим движение жука в системе отсчета, связанной с диском (рис.3,*в*), – ведь именно относительно этой системы отсчета нам задано его движение. В этой системе отсчета жук ползет вдоль края диска, и отрезок *РЖ* укорачивается со скоростью

$$u = v\cos(90^\circ - \beta) = v\sin\beta = \frac{a}{R}v\sin\alpha .$$

(Последнее равенство получено с помощью теоремы синусов $R/\sin\alpha = a/\sin\beta$.)

Теперь мы готовы ответить на все вопросы задачи.

Скорость жука в неподвижной системе отсчета станет максимальной, когда будет достигнуто равенство $\sin\alpha = 1$ (рис.3,*г*). Она будет равна

$$u_{\max} = \frac{a}{R}v = 6 \text{ мм/мин} .$$

Это произойдет, когда углы станут такими: $\alpha = 90^\circ$, $\varphi = 120^\circ$, т.е. когда жук проползет треть окружности, пройдя путь $s = \dfrac{2\pi R}{3}$. Для этого ему понадобится время

$$t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi R}{3v} = 14 \text{ мин} .$$

Когда жук проползет половину пути, угол $\beta$ станет таким, что

$$\sin\beta = \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} ,$$

и скорость жука в неподвижной системе отсчета будет

$$u = v\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}v = 5{,}4 \text{ мм/мин}.$$

### Жесткий стержень

Жесткий стержень – это отрезок, который ни при каких условиях не изменяет свою длину. Для него всегда выполняется равенство

$$u = v_1\cos\alpha - v_2\cos\beta = 0 .$$

Хорошее уравнение для определения скоростей концов жесткого стержня!

Обсудим несколько конкретных задач.

**Задача 4.** *Спортсмен на водных лыжах движется за катером, держась за прикрепленный к катеру трос (рис.4). Найдите скорость спортсмена в тот момент, когда углы между тросом и скоростями катера и спортсмена равны $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$ соответственно. Скорость катера в этот момент равна $v_к = 10$ м/с.*

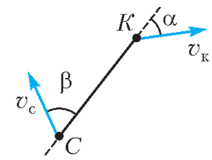


Рис. 4

**Решение.** Условие сохранения длины троса

$$u = v_к\cos 30^\circ - v_с\cos 60^\circ = 0$$

сразу дает ответ:

$$v_с = v_к\frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 17{,}3 \text{ м/с} .$$

Интересно отметить, что скорость спортсмена может оказаться больше скорости катера. Спортсмены знают это и используют в своих выступлениях.

**Задача 5.** *Палочка движется по сторонам прямого угла (рис.5). Скорость точки A равна $v_A = 10$ м/с. Найдите скорость точки B в тот момент, когда отрезок AB будет составлять угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом.*

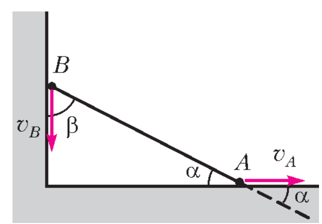


Рис. 5

**Решение.** Точка *B* все время остается на вертикальной прямой. А это означает, что ее скорость направлена вдоль этой прямой вертикально вниз. Это наблюдение позволяет нам восстановить угол между скоростью точки *B* и отрезком *AB*:

$$\beta = 90^\circ - \alpha .$$

Трех известных величин вполне достаточно, чтобы с помощью нашего уравнения

$$u = v_A\cos\alpha - v_B\cos(90^\circ - \alpha) = 0$$

найти четвертую:

$$v_B = v_A\frac{\cos\alpha}{\cos(90^\circ - \alpha)} = v_A\frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 17{,}3 \text{ м/с} .$$

**Задача 6.** *Два кольца одинакового радиуса катятся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями v (рис.6). Найдите скорость верхней точки пересечения колец в тот момент, когда угол $AO_1O_2$ будет равен $\alpha$.*

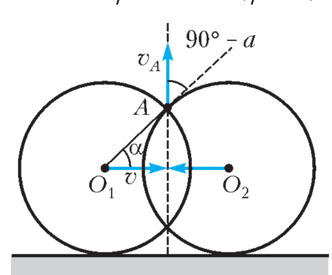


Рис. 6

– Подождите, – скажет внимательный читатель. – Мы говорили об отрезках, а об окружностях речи не было!

– Законное замечание, – ответим мы. – В условии задачи действительно ничего не говорится об отрезках, да и реально никакого отрезка в катящемся колесе мы не найдем. Но ничего страшного. Мы будем рассматривать воображаемый отрезок $O_1A$, который соединяет центр $O_1$ левого колеса и точку пересечения колес *A*. Точка $O_1$ этого отрезка движется горизонтально с известной скоростью *v*, а точка *A* движется вертикально вверх с неизвестной пока скоростью $v_A$. А что можно сказать о длине этого воображаемого отрезка?

– Она остается постоянной и равной радиусу колеса.

– Ну а если так, то наше уравнение для этого отрезка

$$u = v_A \cos(90° - \alpha) - v\cos\alpha = 0$$

сразу дает ответ:

$$v_A = v\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = v\,\mathrm{ctg}\,\alpha .$$

Что-то все совсем просто. Давайте попробуем что-нибудь посложнее.

### Несколько отрезков

Наш метод получает новый импульс, когда в задачах появляется несколько отрезков.

**Задача 7.** *Спортсмены бегут колонной со скоростью $v$ = = 5 м/с. Длина колонны $l_0 = 120$ м. Навстречу им бежит тренер со скоростью $v_{\text{тр}} = 1$ м/с. Каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, разворачивается и начинает бежать назад с той же самой (по модулю) скоростью. Какова будет длина колонны, когда все спортсмены развернутся?*

**Решение**. Длина колонны начнет изменяться тогда, когда скорости первого и последнего спортсменов станут разными, т.е. когда первый спортсмен уже развернулся и бежит вправо, а последний еще бежит влево (рис.7,*а*).

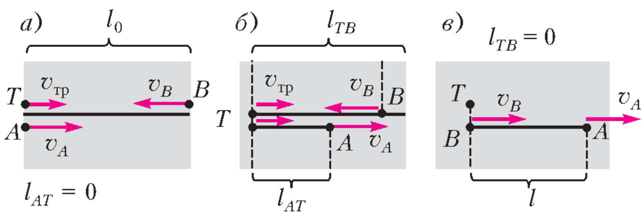



Рис. 7

На этом этапе отрезок-колонна будет складываться из двух отрезков (рис.7,*б*): отрезка *AT* (первый спортсмен *A* – тренер) и отрезка *TB* (тренер – последний спортсмен *B*), а скорость изменения длины такого изломленного отрезка будет равна

$$u = u_{AT} + u_{BT} = \left(v - v_{\text{тр}}\right) + \left(-v_{\text{тр}} - v\right) = -2v_{\text{тр}} .$$

За время $\Delta t = l_0 / \left(v + v_{\text{тр}}\right)$, которое требуется последнему спортсмену *B* и тренеру, чтобы встретиться (чтобы длина отрезка *TB* обратилась в ноль; рис.7,*в*), длина колонны изменится на

$$\Delta\ell = u\Delta t = -\frac{2v_{\text{тр}}}{v + v_{\text{тр}}} l_0$$

и станет равной

$$l = l_0 + \Delta l = \frac{v - v_{\text{тр}}}{v + v_{\text{тр}}} l_0 = 80 \text{ м} .$$

«Изломленные отрезки» – это очень интересно. Ведь это то, что в технике называется гибкими связями. А проще – веревками. Поэтому наша формула открывает целый ряд возможностей для расчета различных простых приспособлений.

**Задача 8.** *К крыше детской модели троллейбуса прикреплен блок B (точечный), через который проходит веревка (рис.8,а). Один конец веревки закреплен в точке A, а за другой тянут горизонтально со скоростью $v_0$. С какой скоростью v движется модель в тот момент, когда закрепленная часть веревки составляет угол $\alpha$ ( $0 < \alpha < 90°$ ) с горизонтом? Считайте, что при движении модель не отрывается от горизонтальной поверхности стола.*

**Решение**. В этом случае веревка представляет собой изломленный отрезок (рис.8,*б*) – отрезок *AB* и отрезок *BC*. Общая длина веревки (сумма длин отрезков) не должна

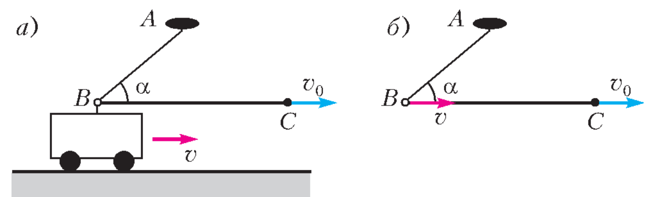



Рис. 8

изменяться, поэтому справедливо равенство

$$u = u_{AB} + u_{BC} = (-v\cos\alpha) + (-v + v_0) = 0 .$$

Отсюда получаем ответ:

$$v = \frac{v_0}{1 + \cos\alpha} .$$

**Задача 9.** *Три шарика одинаковой массы, связанные двумя нерастяжимыми нитями (рис.9), движутся по плоскости так, что нити все время остаются натянутыми. В некоторый момент времени оказалось, что угол между скоростью первого шарика и нитью 1–3 равен $\alpha$, угол между скоростью второго шарика и нитью 2–3 равен $\beta$, а угол между самими нитями равен $\gamma$. Чему равна кинетическая энергия третьего шарика в этот момент, если кинетическая энергия первого шарика 27 Дж, а второго 32 Дж? Для расчета примите* $\alpha = \arcsin(1/3)$, $\beta = \arcsin(1/4)$, $\gamma = \arcsin(2/3)$.

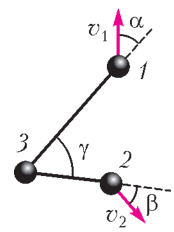



Рис. 9

**Решение.** В этой задаче две неизвестные величины – модуль скорости третьего тела $v_3$ и угол $\varphi$, который она составляет с нитью *1–3*. Записывая для каждой нити условие сохранения ее длины, получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} v_1\cos\alpha - v_3\cos\varphi = 0, \\ v_2\cos\beta - v_3\cos(\gamma - \varphi) = 0. \end{cases}$$

Для нахождения скорости $v_3$ следует избавиться от угла $\varphi$ с помощью основного тригонометрического тождества $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1$. Выполните эту часть решения самостоятельно. В результате получается такой ответ:

$$E_3 = \frac{1}{\sin^2\gamma}\left(E_1\cos^2\alpha + E_2\cos^2\beta - 2\sqrt{E_1E_2}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right) = 31{,}5 \text{ Дж} .$$

### Кинематика отрезка и экстремумы

В предыдущих задачах наши отрезки и удлинялись, и сокращались, и удерживали свою длину постоянной. Но не это самое интересное. Самые же интересные моменты жизни отрезков – это те моменты, когда уменьшение длины отрезка сменяется его увеличением. Почему? Потому что именно в этот момент длина отрезка достигает минимума. Кстати, заметим, что в момент достижения минимума (экстремума) скорость изменения длины отрезка (*u*) равна нулю.

**Задача 10.** *В свое время Одиссею, вернувшемуся в свой дом после многолетнего путешествия, пришлось доказывать свои права на царство, натягивая тетиву на лук. Говорят, что после этого на Итаке герои соревнуются в силе, пытаясь опоясать упругой тетивой «треугольник Одиссея» так, как показано на рисунке 10,а. Подсчитайте, какую минимальную силу для этого надо приложить, если треугольник Одиссея – это равнобедренный треугольник с длиной боковой стороны 200 см и длиной основания 100 см. Длина тетивы 250 см, а для ее растяжения на каждый сантиметр надо прикладывать силу 100 Н.*

**Решение.** Пусть тетива проходит через точки $O_1$ и $O_2$, лежащие на боковых сторонах треугольника (рис.10,*б*).

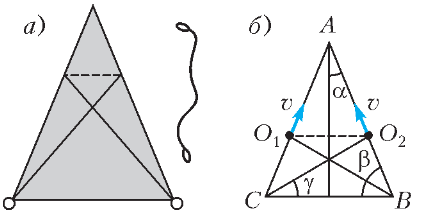


Рис. 10

(Понятно, что в силу симметрии задачи нам всегда следует располагать эти точки симметрично.) Начнем теперь смещать эти точки (симметрично) вдоль боковых сторон со скоростью $v$. Тогда скорость изменения общей длины тетивы будет равна

$$u = u_{CO_2} + u_{O_2O_1} + u_{O_1B} = -2v\left(\cos(\beta+\gamma)+\cos\beta\right),$$

где $\beta$ – боковой угол исходного треугольника, $\gamma$ – угол, который задает направление тетивы относительно основания треугольника. В тот момент, когда длина тетивы достигает минимума, скорость изменения ее длины обращается в ноль. А это означает, что для тетивы минимальной длины имеет место равенство

$$\gamma = 180° - 2\beta = \alpha,$$

где $\alpha$ – половина угла при вершине $A$. Иными словами, треугольник $CO_2B$ должен быть подобен половине исходного треугольника. Этого достаточно, чтобы найти минимальную длину тетивы – сделайте это самостоятельно. Она оказывается равной 250 см, а для того чтобы опоясать треугольник Одиссея, необходимо приложить силу, равную 2500 Н. Действительно, такое по силам лишь настоящим силачам!

Рассматривать скорость изменения длины отрезка бывает полезным даже тогда, когда, на первый взгляд, в этом нет явной нужды.

**Задача 11.** *Из города N выходят две дороги, угол между которыми равен 60° (рис.11,а). По одной дороге из города выезжает «Альфа-ромео» со скоростью $v$ = 100 км/ч, по другой в город движется «Вольво» с такой же скоростью. Чему будет равно минимальное расстояние между автомашинами, если первоначально «Вольво» находилась на расстоянии $l$ = 200 км от города?*

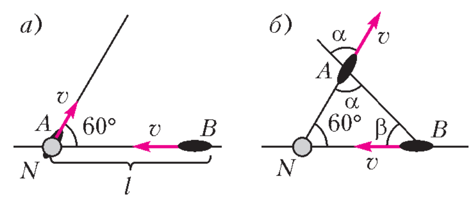


Рис. 11

**Решение.** Все внимание – на отрезок $AB$, который соединяет две машины. Чему равна скорость изменения длины этого отрезка в произвольный момент времени? Смотрим на рисунок 11,*б* и пишем

$$u = v\cos\alpha - v\cos\beta.$$

Когда расстояние между машинами становится минимальным, это выражение обращается в ноль, т.е. в момент достижения минимума $\alpha = \beta = 60°$ и треугольник $NAB$ становится равносторонним.

Установив этот важный факт, мы теперь легко получим требуемый ответ. Чтобы сделать это в духе нашего сегодняшнего разговора, обратим свое внимание на изломанный отрезок $BNA$. Участок $AN$ увеличивается со скоростью $v$, а участок $BN$ уменьшается ровно с такой же скоростью. Получается, что общая длина изломленного отрезка $BNA$ не изменяется и остается равной $l$ = 200 км. Поэтому в интересующий нас момент каждая из сторон треугольника $BNA$, а значит и расстояние между машинами, будет 100 км.

**Упражнения**

**1.** Изменим одну фразу в условии задачи 7. Теперь будем считать, что каждый спортсмен, поравнявшись с тренером, разворачивается и начинает бежать назад со скоростью $w$ = = 4 м/с. Найдите для этого случая, чему будет равна длина колонны после того, как все спортсмены развернутся.

**2.** На Праздник Большого Зайца 3600 зайцев равномерно разместились на окружности радиусом 3600 м и по команде начали бежать с постоянной скоростью 10 м/с. Сколько времени будет длиться этот забег, если каждый заяц держит курс на своего соседа? А если на соседа соседа? Или на соседа соседа соседа?

**3.** Картонный диск радиусом $R$ = 8 см и массой $m$ = 5 г подвешен на оси, проходящей на расстоянии $a$ = 4 см от его центра (см. рис.3,*а*). На нижнюю точку диска (точку $A$) садится жук массой $M_1 = 1$ г и начинает ползти по краю диска со скоростью $v$ = 12 мм/мин на противоположный край диска – в точку $B$. Найдите максимальное значение скорости центра масс системы «диск+жук» в этом процессе (относительно неподвижной системы отсчета). Как изменится ответ, если жук хорошо пообедает, прежде чем садиться на диск, и его масса станет равной $M_2 = 15$ г?

**4.** Палочка движется по сторонам тупого угла $\varphi = 120°$ (рис.12). Скорость точки $A$ постоянна равна $v_A = 10$ м/с. Найдите максимальное значение скорости точки $B$.

**5.** Палочку пытаются двигать так, чтобы один ее конец, точка $A$, двигался по горизонтальной стороне острого угла $\varphi = 60°$

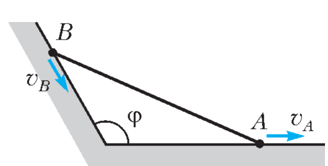


Рис. 12

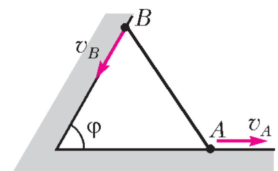


Рис. 13

(рис.13) с постоянной скоростью, а второй конец, точка $B$, все время оставался на наклонной стороне угла. В течение какого времени такое движение может быть реализовано, если известно, что через 5 с после начала движения скорость точки $B$ была равна нулю? Движение точки $A$ начинается из вершины угла.

**6.** Пусть теперь (см. задачу 6 в условии) левое кольцо катится со скоростью $v$, а правое кольцо покоится. Чему будет равна скорость верхней точки пересечения колец в тот момент, когда угол $AO_1O_2$ станет равным $\alpha$?

**7.** Лодку подтягивают к берегу с помощью веревки, перекинутой через блок $O$ (рис.14). Какова скорость лодки в тот момент, когда веревка составляет угол $\alpha$ с горизонтом? Веревку вытягивают со скоростью $v$.

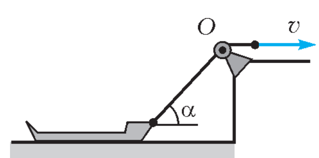


Рис. 14

**8.** Два колеса радиусами $R$ и $r$ катятся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, равными $v$. Найдите скорость верхней точки $A$ пересечения колес в тот момент, когда она будет находиться на одной горизонтали с центром большого колеса.

**9.** Когда Матвей идет в гости к бабушке, он всегда заходит на речку за водой (рис.15). Подскажите Матвею, в какую точку $O$ на берегу реки ему следует идти, чтобы его путь был самым коротким. Чему равна длина самого короткого пути? Размеры даны на рисунке, размер одной клетки – 100 м.

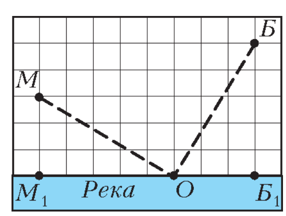


Рис. 15

# Каскады из правильных многогранников

Правильные многогранники (рис. 1) с древних времен привлекали к себе внимание ученых, строителей, архитекторов и многих других. Их поражали красота, совершенство, гармония этих многогранников.

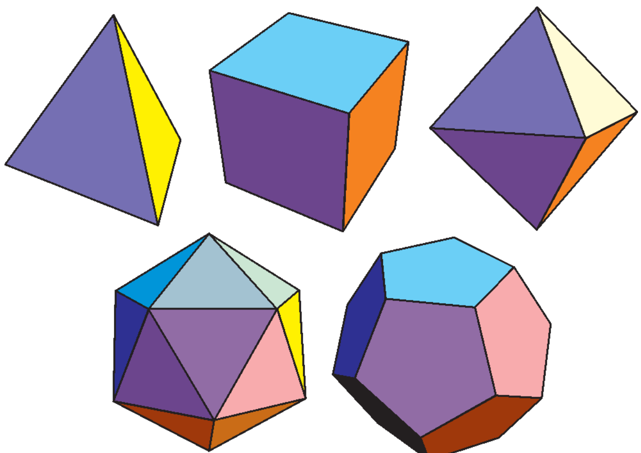


*Рис. 1*

Здесь мы расскажем, как правильные многогранники можно вписывать друг в друга. Вписывая один многогранник в другой, другой — в третий и т.д., можно получать красивые «каскады» правильных многогранников.

В куб можно вписать октаэдр (рис. 2). Центры граней куба образуют вершины вписанного в него октаэдра.

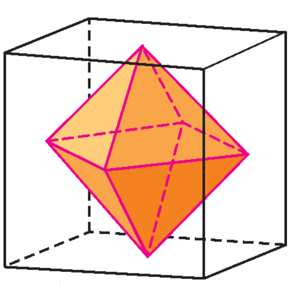


*Рис. 2*

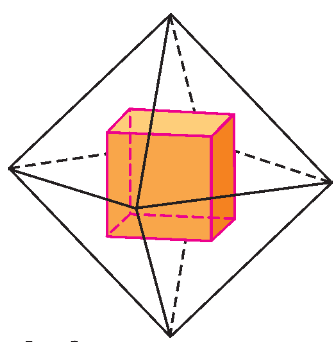


*Рис. 3*

В свою очередь, центры граней октаэдра образуют вершины вписанного в него куба (рис. 3).

Многогранники, обладающие таким свойством, называются взаимно двойственными.

Другим примером взаимно двойственных правильных многогранников являются додекаэдр и икосаэдр (рис. 4, 5).

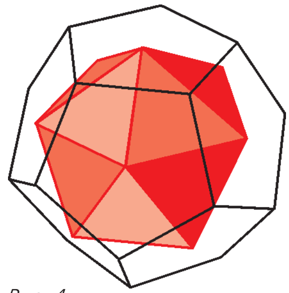


*Рис. 4*

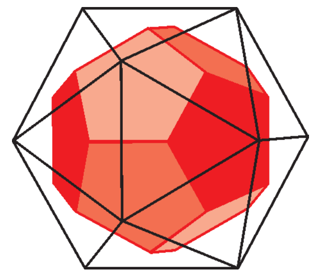


*Рис. 5*

В куб можно вписать тетраэдр, при этом вершины тетраэдра будут лежать в вершинах куба (рис. 6).

В свою очередь, куб можно вписать в додекаэдр так, чтобы вершины куба лежали в вершинах додекаэдра (рис. 7).

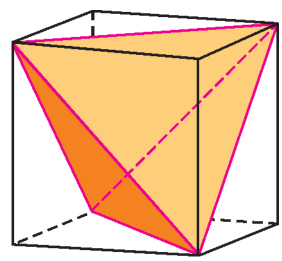


*Рис. 6*

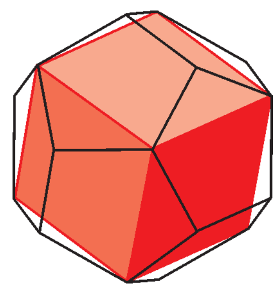


*Рис. 7*

При вписывании одного правильного многогранника в другой вершины первого могут лежать на серединах ребер второго. Так в правильный тетраэдр можно вписать октаэдр (рис. 8).

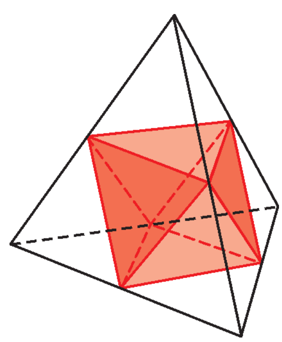


*Рис. 8*

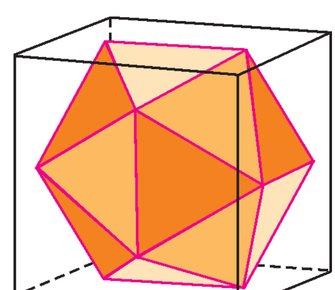


*Рис. 9*

Более сложным способом в куб вписывается икосаэдр: середины ребер икосаэдра лежат в центрах граней куба (рис. 9). Попробуйте вычислить отношение ребер куба и икосаэдра в этой конфигурации.

Аналогичным образом в куб можно вписать додекаэдр (рис. 10).

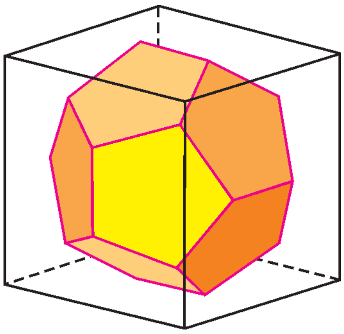


*Рис. 10*

Оказывается, комбинируя рассмотренные случаи, в любой правильный многогранник можно вписать все остальные правильные многогранники. Скажем, из рисунков 11 и 12 видно, как в додекаэдр вписать тетраэдр и октаэдр.

Это означает, что из правильных многогранников можно сделать «каскады», вписывая их друг в друга

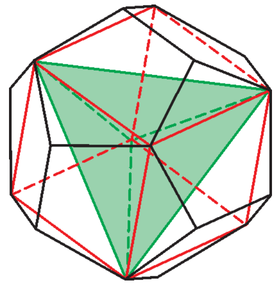


*Рис. 11*

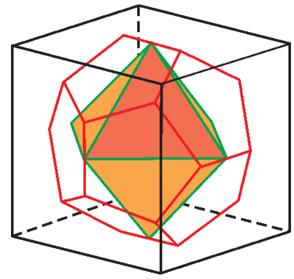


*Рис. 12*

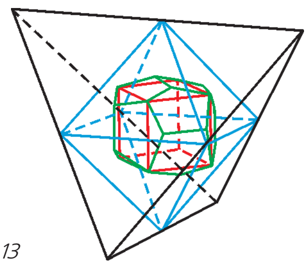


*Рис. 13*

в любом порядке. Например, на рисунке 13 изображен каскад «тетраэдр — октаэдр — додекаэдр — куб».

Еще несколько каскадов изображено на рисунках 14—19.

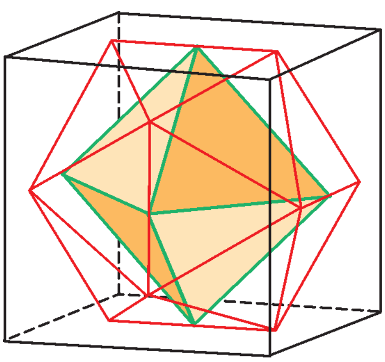


*Рис. 14*

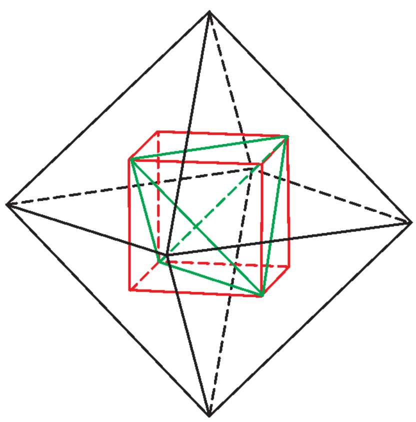


*Рис. 15*

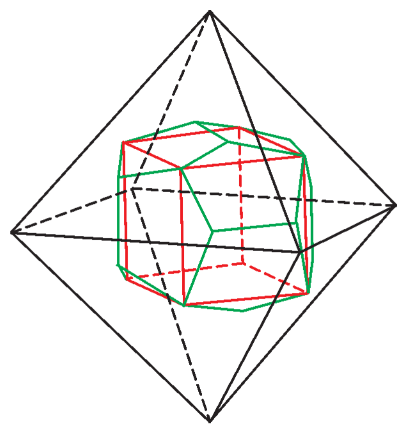


*Рис. 16*

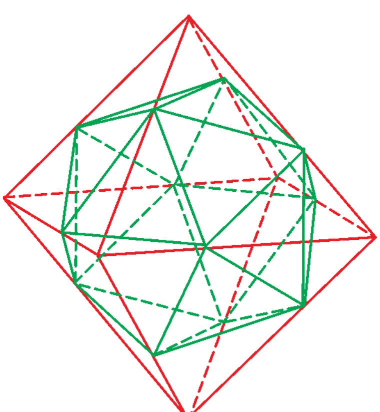


*Рис. 17*

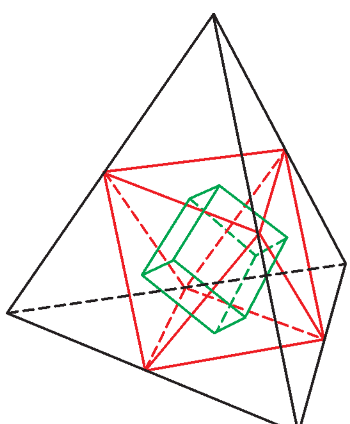


*Рис. 18*

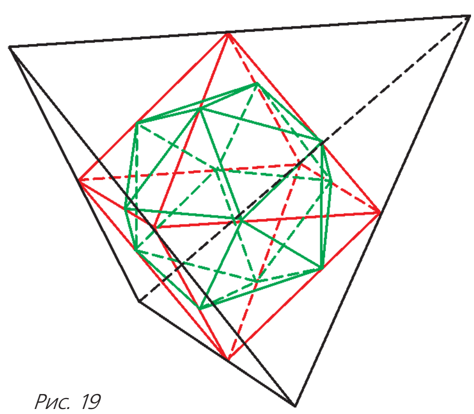


*Рис. 19*

*Материал подготовили И.Смирнова, В.Смирнов*

# Заочная школа СУНЦ НГУ

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) уже почти 50 лет работает Заочная физико-математическая школа (ЗШ) для учащихся 5–11 классов общеобразовательных школ.

Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускников Заочной школы СУНЦ НГУ.

Преподаватели общеобразовательных учреждений могут работать по программам ЗШ СУНЦ НГУ в форме факультативных занятий с группой учащихся.

Ежегодно лучшие ученики 8–10 классов ЗШ приглашаются в Летнюю школу, которая проводится в новосибирском Академгородке с 1 по 23 августа, для участия в конкурсе в СУНЦ НГУ.

В ЗШ СУНЦ НГУ принимаются все желающие и без вступительных экзаменов. Прием в школу ведется круглогодично. Чтобы стать учащимся ЗШ, необходимо прислать заявление, указав класс и отделения, на которых вы хотите учиться, свои фамилию, имя и отчество (печатными буквами), свой подробный адрес с индексом и выполненное первое задание. Задание выполняется в обычной ученической тетради и высылается простой или заказной бандеролью. Необходимо присылать решенное задание класса, в котором вы будете учиться в Заочной школе.

Можно присылать работы и по электронной почте. Требования к оформлению работ в электронном виде, необходимые документы и подробную информацию о ЗШ можно найти на сайте заочной школы: http://zfmsh.nsu.ru

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон/факс: (383) 363-40-66

E-mail:distant@sesc.nsu.ru или zfmsh@yandex.ru

## ПЕРВЫЕ ЗАДАНИЯ НА 2015/16 УЧЕБНЫЙ ГОД

### Математическое отделение

#### МАТЕМАТИКА

*5 класс*

**1.** Ученик от дома до школы шел со скоростью 3 км/ч, а от школы до дома – со скоростью 4 км/ч и затратил на весь путь некоторое время. С какой постоянной скоростью должен идти ученик от дома до школы и обратно, чтобы затратить на весь путь такое же время?

**2.** Найдите 25% от суммы четырех дробей

$$\frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{11}{12}.$$

**3.** Даны две дроби $\frac{100\ldots00}{200\ldots01}$ и $\frac{100\ldots02}{200\ldots03}$, в числителях и знаменателях которых записаны 100-значные числа, а вместо точек в записи стоят нули. Определите, какая из этих дробей больше другой.

**4.** Найдите, сколько раз множитель 2 входит в разложение произведения всех натуральных чисел от 1 до 49 на простые множители.

**5.** Найдите значение выражения $99 - 97 + 95 - \ldots - 5 + 3 - 1$.

**6.** Пять детей вместе собрали 14 грибов, и при этом ни у каких двух из них не было одинакового количества грибов. Объясните, почему в этом случае кто-то из этих детей не нашел ни одного гриба.

*6 класс*

**1.** В понедельник ученик от дома до школы пошел со скоростью 3 км/ч, а от школы до дома – со скоростью 4 км/ч и затратил на весь путь некоторое время. Во вторник ученик пошел от дома до школы со скоростью 3,2 км/ч. С какой постоянной скоростью должен идти ученик от школы до дома, чтобы затратить на весь путь такое же время, как и в понедельник?

**2.** Найдите, на сколько процентов нужно увеличить число $1\frac{2}{3}$, чтобы в результате получить наименьшее возможное натуральное число.

**3.** Даны две дроби $\frac{200\ldots01}{300\ldots02}$ и $\frac{200\ldots03}{300\ldots04}$, в числителях и знаменателях которых записаны 100-значные числа, а вместо точек в записи стоят нули. Определите, какая из этих дробей больше другой.

**4.** Найдите, сколько раз множитель 3 входит в разложение произведения всех натуральных чисел от 1 до 100 на простые множители.

**5.** Найдите значение выражения $999 - 996 + 993 - \ldots - 6 + 3$.

**6.** Семь детей вместе собрали 27 грибов, и при этом ни у каких двух из них не было одинакового количества грибов. Объясните, почему в этом случае кто-то из этих детей не нашел ни одного гриба.

*7 класс*

**1.** Два велосипедиста одновременно выехали из пунктов $A$ и $B$ навстречу друг другу, повстречались через 45 минут, после чего первый велосипедист приехал в пункт $B$ через 1 час. Найдите, за какое время второй велосипедист проедет весь путь от $A$ до $B$.

**2.** Решите уравнение

$$(x+1)(x+3)(x+17) = (x+2)(x+5)(x+11).$$

**3.** Найдите значение выражения $2015 - 2010 + 2005 - \ldots - 10 + 5$.

**4.** В квадрате $ABCD$ со стороной 9 см точки $M$ на стороне $BC$ и $N$ на стороне $CD$ расположены так, что $BM = CN = 6$ см. Найдите площадь треугольника $AMN$.

**5.** Начиная с числа 1, записали подряд все натуральные числа до 100 включительно и получили запись натурального числа $M$. Найдите остаток, который получится при делении числа $M$ на 9.

**6.** Из квадрата размером $8\times 8$ вырезали два угловых квадрата размером $1\times 1$, не прилежащих к одной стороне. Можно ли оставшуюся часть разрезать на прямоугольники размером $2\times 1$? Ответ нужно пояснить.

*8 класс*

**1.** Два велосипедиста одновременно выехали из пунктов $A$ и $B$ навстречу друг другу, повстречались через 1 час, после чего первый велосипедист приехал в пункт $B$ на 35 минут раньше, чем второй велосипедист приехал в пункт $A$. Найдите, за какое время второй велосипедист проедет весь путь от $A$ до $B$.

**2.** В квадрате $ABCD$ со стороной 10 см точка $M$ – середина стороны $CD$, отрезки $AC$ и $BM$ пересекаются в точке $N$. Найдите площадь четырехугольника $ANMD$.

**3.** Решите уравнение

$$(x+1)^2+(x+2)^2+\ldots+(x+10)^2=(x+1+2+\ldots+10)^2.$$

**4.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с равными сторонами $AB$ и $BC$ окружность, проходящая через вершины $B$, $C$ и середину $K$ стороны $AB$, пересекает прямую, содержащую высоту $BH$, в точке $L$. Докажите, что треугольник $AKL$ равнобедренный.

**5.** Найдите уравнение параболы, которая симметрична параболе $y=2x^2-3x+1$ относительно прямой $x = 2$.

**6.** Начиная с числа 1, записали подряд все натуральные числа до 1111 включительно и получили запись натурального числа $M$. Найдите остаток, который получится при делении числа $M$ на 9.

### *9 класс*

**1.** От двух бревен отпилили по одинаковому куску, и первое бревно стало втрое длиннее второго. После того как от них еще раз отпилили по такому же куску, второе бревно стало короче первого в шесть раз. Во сколько раз первое бревно было длиннее второго первоначально?

**2.** Найдите уравнение параболы, которая симметрична параболе $y=4x^2-8x+3$ относительно прямой $y = 2$.

**3.** Известно, что $109=\left(7^2+13^2\right):2$. Представьте число $109^2$ в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

**4.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с равными сторонами $AB$ и $BC$ окружность, проходящая через вершины $B$ и $C$, пересекает сторону $AB$ в точке $K$ и прямую, содержащую высоту $BH$, в точке $L$. Докажите, что треугольник $AKL$ равнобедренный.

**5.** Начиная с числа 1, записали подряд все натуральные числа до 2015 включительно и получили запись натурального числа $M$. Найдите остаток, который получится при делении числа $M$ на 9.

**6.** Квадрат, площадь которого 16 см$^2$, повернули вокруг одной вершины на $30°$ и получили другой квадрат. Найдите площадь общей части этих двух квадратов.

### *10 класс*

**1.** В корзине лежало не более 70 грибов. После разбора оказалось, что 52% из них – белые. Если отложить 3 самых малых гриба, то среди оставшихся будет ровно половина белых. Сколько грибов было в корзине?

**2.** Найдите сумму $1\cdot2^{18}+2\cdot2^{17}+3\cdot2^{16}+\ldots+18\cdot2^1+19$.

**3.** Найдите длину линии на координатной плоскости, которая задается уравнением $\left||x|-1\right|+\left||y|-2\right|=4$.

**4.** В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$ и $AD = BE = CF$. Докажите, что все вершины шестиугольника расположены на одной окружности.

**5.** Число $M$ равно произведению всех натуральных чисел, которые меньше 100 и не делятся на 5. Найдите, какой остаток получится при делении числа $M$ на 5.

**6.** Решите уравнение $(x+1)^4=x^2+2x+13$.

### *11 класс*

**1.** Найдите все действительные числа $a$, при каждом из которых числа $\sqrt{a^2+9}$ и $\sqrt{4a^2-3}$ оба целые.

**2.** Найдите количество всех последовательностей из 60 нулей и 40 единиц, в которых никакие две единицы не стоят рядом.

**3.** Найдите длину линии на координатной плоскости, которая задается уравнением $\left||x|-3\right|+\left||y|-2\right|=6$.

**4.** Число $M$ равно произведению всех натуральных чисел, которые меньше 100 и не делятся на 7. Найдите, какой остаток получится при делении числа $M$ на 7.

**5.** В пятиугольнике $ABCDE$ сторона $AB$ параллельна стороне $DE$, а сторона $BC$ – стороне $AE$, при этом $AB : DE = 7 : 5$, $BC : AE = 3 : 5$. Найдите площадь четырехугольника $BCDE$, если площадь треугольника $ACD$ равна 10.

**6.** Решите уравнение $(x+2)^4=x^2+4x+76$.

## Физическое отделение

## ФИЗИКА

### *7 класс*

**1.** Сколько ступенек лестницы вы насчитаете, спускаясь с пятого этажа (это, конечно, очень простой вопрос)? А на сколько метров вы опуститесь? Оцените погрешность измерения.

**2.** Попытайтесь измерить высоту пятиэтажного дома на расстоянии (не надо лазить на крышу с веревкой). Способ придумайте сами. Попытайтесь оценить погрешность измерения.

**3.** Поезд, двигаясь равномерно со скоростью $v_1$, прошел некоторое расстояние за время $t_1$. С какой скоростью $v_2$ он должен двигаться обратно, чтобы пройти тот же путь за время $t_2$?

**4.** Сколько времени пассажир, сидящий у окна поезда, идущего со скоростью $v_1$ = 54 км/ч, будет видеть идущий мимо него встречный поезд, скорость которого $v_2$ = 36 км/ч, а длина $L$ = 150 м?

**5.** Катер идет по течению реки из пункта $A$ в пункт $Б$ время $t_1$ = 3 ч, обратно – время $t_2$ = 6 ч. Сколько времени потребуется катеру для того, чтобы пройти расстояние между пунктами $A$ и $Б$ по течению при выключенном моторе?

### *8 класс*

**1.** Пустой металлический шар весом $P$ = 3 Н и объемом $V = 1200$ см$^3$ удерживают под водой. Останется ли шар под водой, если его отпустить?

**2.** На паром длиной $a$ = 5 м и шириной $b$ = 4 м заехал автомобиль. В результате паром погрузился в воду на $h$ = 10 см. Какова масса автомобиля?

**3.** Эскалатор поднимает неподвижно стоящего человека за время $t_1$ = 1 мин. По неподвижному эскалатору человек поднимается за время $t_2$ = 3 мин. Сколько времени будет подниматься человек по движущему вверх эскалатору?

**4.** Кран поднимает груз массой $m$ = 5 т. При подъеме груза двигатель крана развивает мощность $N$ = 30 кВт. В течение какого времени $t$ груз будет поднят на высоту $h$ = 20 м?

**5.** Двигатели электрички при движении со скоростью $v$ = 54 км/ч потребляют мощность $N$ = 900 кВт. КПД двигателей и передающих механизмов $\eta = 0{,}8$. Найдите силу тяги $F$.

### *9 класс*

**1.** Экспериментатор из подручных материалов смастерил рычажные весы. Положив на правую чашку предварительно сбалансированных весов неизвестный груз, он нашел, что баланс весов восстанавливается, если на левую чашку положить гири общим весом $P_1$. Если неизвестный груз положить на левую чашку, уравновесить его удается гирями общим весом $P_2$. Каков истинный вес груза?

**2.** Две группы туристов одновременно вышли из лагеря в лесу в деревню, расположенную на берегу реки, и одновременно пришли в пункт назначения. Одна группа отправилась по прямому маршруту, вторая решила по кратчайшему пути добраться до реки и далее сплавиться по ней. Определите скорость течения реки, если скорость пешего перемещения туристов $v = 4$ км/ч, первая группа затратила на маршрут $t_1 = 6$ ч 30 мин, а вторая за время $t_2 = 2$ ч 30 мин добралась до реки. Пройденный участок реки – прямой.

**3.** Брусок высотой $H$ и плотностью $\rho$ плавает в жидкости плотностью $\rho_0$. Когда на брусок поставили гирю массой $m$, глубина его погружения увеличилась на $h$. Какой минимальный вес нужно положить на брусок, чтобы он полностью погрузился в жидкость?

**4.** Имеется две бочки, заполненные одинаковым количеством воды с температурой $T_a = 20$ °C. После того как в правую бочку поместили горячий камень, температура в ней повысилась до $T_b = 80$ °C. Когда камень из правой бочки перенесли в левую, температура в левой бочке повысилась до $T_{a_1} = 40$ °C. Какой будет температура в правой бочке после того, как в нее вернут камень? После всякого перемещения камня температура устанавливается.

**5.** Из тонкой фольги вырезали квадрат. После того как к двум противоположным сторонам этого квадрата присоединили с помощью двух медных стержней омметр, он показал сопротивление $R$ (рис.1). Кусочек фольги сложили вдоль

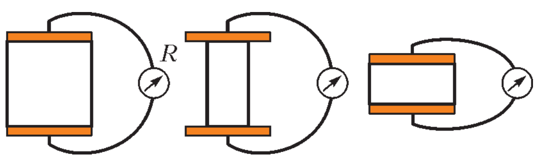



*Рис. 1*

оси симметрии вдвое, так что из квадрата получился прямоугольник. Что покажет омметр, если его аналогичным образом подключить к двум противоположным большим сторонам полученного прямоугольника? А к двум малым сторонам?

*10 класс*

**1.** В стайерском забеге лыжник с номером 2 стартовал на время $\tau$ позже лыжника с номером 1, но через время $9\tau$ догнал его. Через время $20\tau$ после своего старта лыжник №2 сделал первый круг. Через какое время после своего старта №2 догонит №1 следующий раз?

**2.** Путника застала гроза. Он укрылся под деревом. Первый раз молния ударила в дерево спереди на расстоянии $L_1 = 1{,}11$ км от путника, и через время $t_1 = 3$ с он услышал раскат грома. Вторая молния ударила в скалу, расположенную сзади на расстоянии 6,2 км от путника, – звук грома он услышал через $t_2 = 20$ с после вспышки молнии. Определите скорость ветра, дующего навстречу путнику. Скорость звука считайте постоянной.

**3.** Ракета массой $m$ стартует с земли и через время $t$ поражает цель на высоте $h$ и на расстоянии $L$ по горизонтали от своей стартовой позиции (рис.2). Определите силу тяги двигателя ракеты, если эта сила не меняется во время полета ни по величине, ни по направлению и масса ракеты также остается неизменной. Ускорение свободного падения равно $g$.

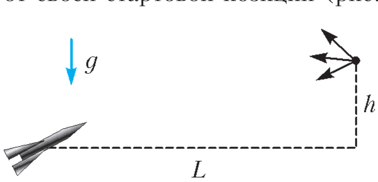



*Рис. 2*

**4.** Сделанный из легкого материала канат плавает на поверхности воды. Если к концу каната привязать гирю, она погружается на глубину $h$, увлекая за собой часть каната (рис.3). На какую глубину погрузится гиря, если ее привязать к канату на расстоянии $h/4$ от его конца?

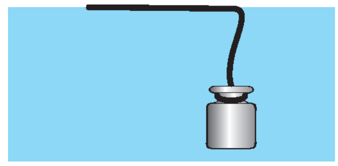


*Рис. 3*

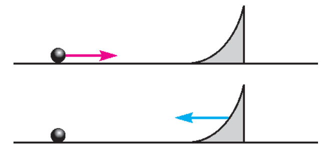


*Рис. 4*

**5.** Имеется трамплин, начинающийся горизонтально и заканчивающийся вертикально, и шарик (рис.4). Для того чтобы шарик, оторвавшись от неподвижного трамплина, поднялся на некоторую высоту, ему нужно сообщить кинетическую энергию $E$. Такого же подъема шарика можно достичь, если навстречу неподвижному шарику двигать трамплин с постоянной скоростью. Какую работу для этого придется совершить? Высотой трамплина можно пренебречь.

*11 класс*

**1.** Решите задачу 1 для 10 класса.

**2.** Решите задачу 3 для 10 класса.

**3.** Из резинки длиной $L$ и жесткостью $k$ сделали рогатку. Резинку закрепили так, чтобы она не натягивалась и не провисала. С помощью получившейся рогатки, оттянув ее на $h$ вниз, запустили камушек массой $m$ (рис.5). На какую высоту он поднимется? Массой резинки пренебречь.

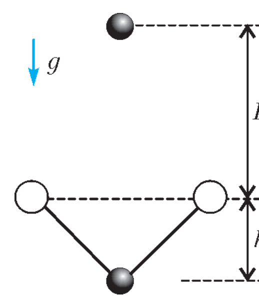



*Рис. 5*

**4.** Цилиндрический сосуд с площадью сечения $S$ закрыт сверху двумя подвижными поршнями массой $m$ каждый (рис.6). Между поршнями находится слой жидкости плотностью $\rho$ и толщиной $h$. Нижний поршень в равновесии опирается на слой воздуха высотой $h$. Через маленькое отверстие в нижнем поршне понемногу проникает воздух. На сколько поднимется верхний поршень, когда утечка воздуха прекратится? Атмосферное давление $p_0$, температура неизменна.

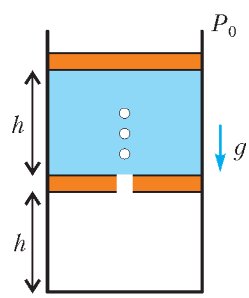



*Рис. 6*

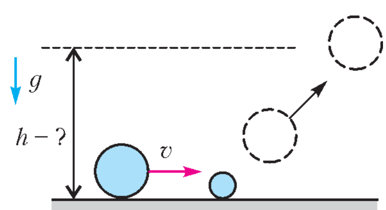



*Рис. 7*

**5.** Два шарика разных радиусов, но равной массы лежат на гладком столе (рис.7). Большому шарику сообщили скорость $v$ в направлении на маленький шарик. Он упруго столкнулся с маленьким шариком и отскочил под углом 45° к горизонтали. На какую высоту он поднялся?

# XXIII Международная олимпиада «Интеллектуальный марафон»

Международный интеллект-клуб (МИК) «Глюон» в рамках международной программы «Дети. Интеллект. Творчество» при участии МГУ имени М.В. Ломоносова, Института педагогических исследований одаренности РАО (г. Новосибирск) и при поддержке Фонда некоммерческих программ «Династия», компаний «Кирилл и Мефодий», «Физикон», «1С», Издательского Дома «Первое сентября» и журналов «Квант», «Потенциал» провел очередную международную тест-рейтинговую олимпиаду «Интеллектуальный марафон» для учащихся 9–11 классов.

Олимпиада проходила с 4 по 11 октября 2014 года на острове Эвбея (Греция) на территории уютного отеля «Palmariva Beach Bomo Club 4* UL», который расположен на берегу Средиземного моря. На олимпиаду приехали участники из разных регионов России и Казахстана. В качестве наблюдателей были представители Испании и Греции.

Одаренные школьники, проявившие интерес к фундаментальным наукам, соревновались в командных и индивидуальных турах по математике, физике, истории научных идей и открытий. В одиннадцатый раз участвовали в олимпиаде школьники, интересующиеся экологией и биологией, соревнуясь в индивидуальных турах по биологии и экологии. Педагоги и психологи собрались на свою научную сессию в шестой раз.

В рамках олимпиады прошел также III Международный математический турнир имени М.В.Ломоносова для учащихся 5–8 классов (олимпийский резерв олимпиады «Интеллектуальный марафон»). Число участников этого турнира растет, что усиливает накал интеллектуальных соревнований среди младших школьников.

Абсолютным победителем олимпиады «Интеллектуальный марафон-2014» по фундаментальным наукам в командном зачете стала команда лицея 2 из города Бугульмы. Ей был вручен главный приз соревнований – суперкубок. Команда была также лучшей в туре по истории научных идей и открытий и по физике, а по математике – призером. Второе место в общем зачете заняла команда Областного центра дополнительного образования одаренных детей из Ростова-на-Дону. Она также заняла первое место по математике и второе место по истории научных идей и открытий. Команде был вручен большой кубок за второе место в общем зачете и соответствующие дипломы за успехи в командных соревнованиях. На третье место вышла команда лицея 1 «Классический» из Ростова-на-Дону. Она также заняла призовые места во всех турах олимпиады, ей был вручен кубок и дипломы.

В индивидуальных соревнованиях абсолютным победителем олимпиады стал Алексей Красников (лицей 2, Бугульма). Ему были вручены большие золотые медали по математике и физике. Вторым призером в общем зачете стал Дмитрий Финагеев (лицей 1 «Классический», Ростов-на-Дону), ему была вручена большая серебряная медаль и малая серебряная медаль за второе место по физике. Большую бронзовую медаль в общем зачете завоевал Никита Корчагин (лицей 1 «Классический», Ростов-на-Дону). Руслан Сафронов (Областной центр дополнительного образования одаренных детей, Ростов-на-Дону) получил малую серебряную медаль по математике, Камиль Бурханов (лицей 2, Альметьевск) получил малую бронзовую медаль по математике.

Командные соревнования «Математический биатлон» на III Международном математическом турнире имени М.В. Ломоносова среди учащихся 7–8 классов завершились победой команды Областного центра дополнительного образования одаренных детей Ростова-на-Дону. В индивидуальных соревнованиях победителем стала Анастасия Туманова (Областной центр дополнительного образования одаренных детей, Ростов-на-Дону). Призерами стали Константин Посохов (Областной центр дополнительного образования одаренных детей, Ростов-на-Дону) и Эдуард Сабиров (лицей 2, Альметьевск). Традиционный приз «Берестяная тарелка» за оригинальный подход к решению задачи был вручен Ярославе Фасахутдиновой (лицей 1 «Классический», Ростов-на-Дону) и Анастасии Тумановой (Областной центр дополнительного образования одаренных детей, Ростов-на-Дону).

Командные соревнования «Математический биатлон» для учащихся 5–6 классов завершились победой команды Келешек (Алматы, Казахстан). В индивидуальных соревнованиях победителем стал Арлен Джунусов (Келешек, Алматы). Призерами стали Дмитрий Виноградский и Николай Бережной (лицей 1 «Классический», Ростов-на-Дону).

Все победители и призеры олимпиады получили разные подарки и призы от организаторов и спонсоров олимпиады.

Международный интеллект-клуб «Глюон» приглашает региональные центры, школы, лицеи и гимназии, работающие с одаренными детьми, принять участие в XXIV Международной олимпиаде «Интеллектуальный марафон», которая пройдет в октябре 2015 года в Израиле.

Заявки на участие присылайте по адресу: 115522 Россия, Москва, Пролетарский проспект, д.15/6, корп.2, МИК «Глюон»

Телефон: (495)517-8014, факс: (495)396-8227

E-mail: gluon@yandex.ru (см.также сайт: http:www.gluon.ru)

### Олимпиада по фундаментальным наукам

Устный командный тур

*Математика*

**1.** Если бы Александр Македонский прожил на 5 лет меньше, он находился бы у власти четверть своей жизни, а если бы он прожил на 9 лет больше, то правил бы половину своей жизни. Сколько лет прожил Александр Македонский?

**2.** Из трех различных цифр составляются всевозможные трехзначные числа. Может ли сумма всех таких чисел быть квадратом целого числа?

**3.** Действительные числа $a$, $b$, $c$ таковы, что $\frac{a}{b+c-a} = \frac{b}{a+c-b} = \frac{c}{a+b-c}$. Чему может быть равно $\frac{a+b}{c}$?

**4.** Может ли выпуклый многоугольник иметь 2014 диагоналей?

**5.** Из вершины $A$ треугольника $ABC$ опущены перпендикуляры $AM$, $AN$ на биссектрисы внешних углов треугольника. Найдите $MN$, если $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

**6.** Чему равно минимальное количество учеников в классе, если известно, что при любой раздаче им двухсот конфет найдутся двое, получившие одинаковое количество конфет (может быть, ни одной)?

**7.** Какое наименьшее количество слонов нужно поставить на шахматную доску, чтобы все поля были побиты?

**8.** Существует ли нецелое число $x$ такое, что числа $x^{19}$ и $x^8$ – целые?

**9.** Два игрока по очереди выкладывают по одной доминошке на свободные клетки клетчатой доски $10 \times 10$. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

**10.** Диагонали $AC$ и $BD$ четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Известно, что периметры треугольников $AOB$, $BOC$, $COD$ и $DOA$ равны. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AC = m$, $BD = n$.

### *Физика*

**1.** На наклонном столе с углом $\alpha$ при вершине стоит невесомая подставка, представляющая собой тонкий диск радиусом $R$ с закрепленной в его центре длинной спицей (рис.1). На спицу нанизывают массивные шарики радиусом $r$. Сколько необходимо шариков, чтобы подставка опрокинулась?

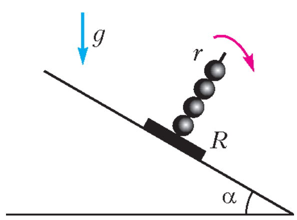


*Рис. 1*

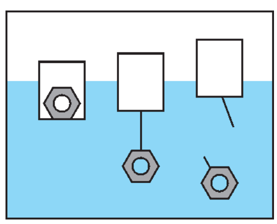


*Рис. 2*

**2.** Внутри плавающей в воде банки лежит гайка (рис.2). Объем погруженной в воду части банки $V_1 = 388$ мл. Гайку вынули из банки и, привязав тонкой невесомой нитью к банке, опустили в воду. Гайка повисла на нити, не касаясь дна водоема. Объем погруженной в воду части банки стал $V_2 = 372$ мл. После обрыва нити объем погруженной в воду части банки уменьшился до $V_3 = 220$ мл. Во сколько раз плотность гайки больше плотности воды?

**3.** Из полного сосуда с водой отлили половину его объема и закрыли сосуд пробкой (рис.3). Расстояние от пробки до дна сосуда $H$, а от поверхности воды до дна $h$. Сосуд переворачивают вверх дном. Как изменится после этого давление на пробку изнутри? Плотность воды $\rho$, ускорение свободного падения $g$.

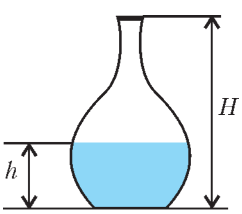


*Рис. 3*

**4.** Длинный стержень с резьбовым отверстием на конце накручен на вертикальный винт. Стержень отпускают. Трение между винтом и стержнем пренебрежимо мало. Как будет двигаться стержень после того, как он слетит с винта?

**5. Экспериментальная задача.** Имеется медицинский шприц с надетой иглой и наполненный водой. Направим иглу вертикально вверх и нажмем на поршень. Из конца иглы вверх поднимется струя воды. Оцените скорость струи на выходе из иглы.

**6.** Найдите, чему равен заряд заземленного металлического шара радиусом $r$, если на расстоянии $R$ от его центра находится заряд $q$.

**7.** Имеется электрическая цепь изображенная на рисунке 4. Что покажет идеальный вольтметр, если его присоединить к точкам $C$ и $D$? Здесь $U_{AB} = 50$ В, $R_0 = 3$ Ом, $R_1 = 4{,}5$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 2$ Ом.

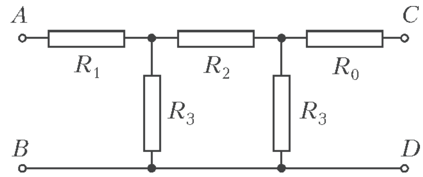


*Рис. 4*

**8.** Из двух одинаковых кусков стальной проволоки свили две пружины. Диаметр витков одной из них $d$, другой $2d$. Первая пружина под действием груза растянулась на одну десятую своей длины. На какую часть своей длины растянется под действием того же груза вторая пружина?

**9.** Две собирающие линзы одинакового диаметра (рис.5) вставлены в трубу с зачерненными внутренними боковыми стенками (все лучи, падающие на стенки, поглощаются). Известно, что фокусное расстояние $F$ одной линзы вдвое больше фокусного расстояния другой и что параллельные лучи, падающие вдоль оси трубы с любой стороны, после прохождения трубы остаются параллельными. На трубу направляют пучок параллельных лучей одной и той же интенсивности сначала слева, а потом справа. Найдите длину этой трубы и отношение светового потока, входящего в трубу (левый край), к световому потоку, выходящему из трубы (правый край), если $F = 50$ см.

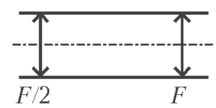


*Рис. 5*

*Справка.* Световой поток – это мощность излучения, оцениваемая по вызываемому им зрительному ощущению.

**10. Экспериментальная задача.** Имеется электрическая цепь, состоящая из батарейки, двух переключателей и лампы накаливания. Цепь работает следующим образом: если лампа не горит, то первым переключателем ее можно включить, а вторым выключить. Нарисуйте схему этой цепи.

## Письменный индивидуальный тур

### *Математика*

**1.** Существует ли натуральное число, десятичная запись куба которого оканчивается на: а) 2 девятки; б) 3 девятки; в) 2014 девяток?

**2.** Найдите $\dfrac{1}{x^2+1} + \dfrac{1}{y^2+1} + \dfrac{2}{xy+1}$, если $x \neq y$, а сумма первых двух слагаемых равна третьему.

**3.** Можно ли из арифметической прогрессии: а) 2, 25, 48, 71, …; б) $1+\sqrt{3}$, $1+2\sqrt{3}$, $1+3\sqrt{3}$, … извлечь бесконечную геометрическую прогрессию?

**4.** Можно ли в круге радиуса 1 поместить без наложений 3 треугольника, площадь каждого из которых равна 1?

**5.** Решите в целых числах уравнение $3^x - 2^y = 5$.

**6.** В параллелограмме $ABCD$ точка $E$ – середина стороны $AD$, точка $F$ – основание перпендикуляра, опущенного из вершины $B$ на прямую $CE$. Найдите площадь треугольника $ABF$, если $AB = a$, $\angle BAF = \alpha$.

**7.** Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_0 = 0$, $|x_k| = |x_{k-1} + 1|$ при $k \geq 1$. Найдите наименьшее возможное значение $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n|$, если: а) $n = 5$; б) $n = 6$; в) $n = 2014$; г) $n = 2015$.

### *Физика*

**1.** Возле гладкой стены стоит однородный стержень массой $M$ и длиной $2L$. От легкого толчка он приходит в движение.

При каком угле $\alpha$ между стержнем и стеной произойдет отрыв стержня от вертикальной стены и каковы будут в этот момент скорости концов стержня по стене и по полу?

**2.** Из цилиндра радиусом $r = 2$ см выдавливают поршнем текучую пасту (рис.6). Она растекается по поверхности слоем толщиной $h = 2$ мм, образуя круговое пятно. Скорость движения поршня $u = 6$ см/с. Какова скорость $v$ расширения границы пятна при радиусе пятна $R = 30$ см?

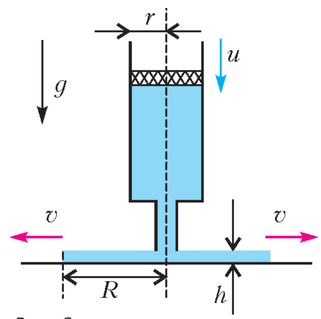



Рис. 6

**3.** В комнате объемом $V = 75\ м^3$ температура воздуха такая же, как на улице, т.е. $t_1 = -20$ °С. Включают электрокамин, и он медленно прогревает воздух в комнате до $t_2 = +23$ °С. Часть воздуха при этом выходит наружу через плотно закрытую форточку. Найдите изменение внутренней энергии воздуха в комнате и работу, которую совершает воздух при расширении наружу. Атмосферное давление принять равным $p_а = 10^5$ Па.

**4.** Постройте график зависимости сопротивления цепи, изображенной на рисунке 7, от сопротивления $r$ каждого из одной пары резисторов. Сопротивление другой пары резисторов неизменно и равно $R = 50$ Ом у каждого. Диод считайте идеальным, т.е. его сопротивление в прямом направлении пренебрежимо мало, а в обратном – очень велико.

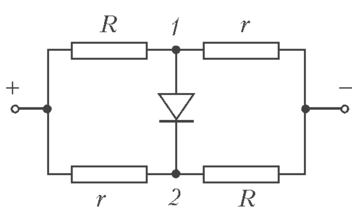



Рис. 7

**5.** Груз висящий на нити длиной $L = 1{,}1$ м, привязанной к гвоздю, толкнули так, что он поднялся и затем попал в гвоздь. Какова его скорость в момент удара о гвоздь? Ускорение свободного падения $g$.

**6.** В полдень через небольшое окошко на южной стене темной комнаты в нее попадает пучок солнечного света, параллельный западной и восточной стенам. После отражения от плоского зеркала, лежащего на горизонтальном столе, пучок падает на северную стену. Какой площади тень отбросит на северной стене вертикально стоящий на зеркале непрозрачный круг радиусом $r = 10$ см, если плоскость зеркала параллельна южной стене?

**7.** Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 500$ кВ, пролетает сквозь поперечное однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}51$ Тл (рис.8). Толщина области с полем $d = 10$ см. Найдите смещение и угол отклонения скорости протона от первоначального направления на выходе из этой области.

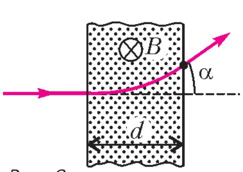



Рис. 8

## История научных идей и открытий

### *Математика*

**1.** Двадцатое предложение IX книги Евклида «Начала» утверждает: «Первых чисел существует больше всякого предложенного количества их».

*Сформулируйте в современных терминах это утверждение и докажите его.*

**2.** Архимед, Евклид, Аполлоний Пергский и другие великие математики древности называли параболой геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки и данной прямой.

*Убедитесь в том, что график функции $y = x^2$ является параболой.*

**3.** В 1202 году Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в «Книге об абаке» рассмотрел последовательность, каждый член которой равен сумме двух предыдущих, т.е. последовательность $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$, $\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} + \varphi_n$ при $n \geq 1$. В дальнейшем числа Фибоначчи часто возникали в различных разделах математики – теории чисел, алгебре, комбинаторике, математической логике и др. Обнаружены многие замечательные свойства этих чисел. Например, можно доказать, что для любого натурального $m$ найдется число Фибоначчи, делящееся на $m$.

*Выясните, может ли какое-нибудь число Фибоначчи быть степенью числа 7.*

**4.** Один из величайших всемирно известных математиков Л.Эйлер в 1752 году доказал теорему, которая считается первой в истории одного из самых глубоких разделов математики – топологии. Теорема Эйлера гласит, что число вершин $В$, число ребер $Р$ и число граней $Г$ произвольного выпуклого многогранника удовлетворяют равенству $В - Р + Г = 2$.

*Пользуясь этой теоремой, выясните, существует ли выпуклый многогранник, все грани которого – шестиугольники.*

**5.** Еще один гениальный математик К.Ф.Гаусс доказал замечательную «теорему об индексе»: если $p$ – простое число, то существует натуральное число $g$ такое, что его степени $g$, $g^2$, …, $g^{p-1}$ дают различные остатки при делении на $p$, причем $g^{p-1} - 1$ делится на $p$ (малая теорема Ферма); и тем самым в выписанной последовательности степеней присутствуют числа, дающие все возможные остатки от деления на $p$. Например, для $p = 17$ можно взять $g = 3$, так как, выписывая последовательно остатки степеней тройки при делении на 17, имеем

$$3,\ 9,\ 10,\ 13,\ 5,\ 15,\ 11,\ 16,\ 14,\ 8,\ 7,\ 4,\ 12,\ 2,\ 6,\ 1$$

– все остатки различны.

*Пользуясь теоремой Гаусса, докажите, что для всякого простого числа $p$ найдется натуральное число $x$ такое, что произведение $(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 - 6)$ делится на $p$.*

### *Физика*

**1.** Нобелевская премия 1904 года была вручена «за исследования плотностей наиболее распространенных газов и за открытие аргона в ходе этих исследований». Ученый, получивший эту премию, был английским аристократом. Он учился в Тринити-колледже. После смерти Дж.К.Максвелла стал вторым Кавендишским профессором и директором Кавендишской лаборатории. Был секретарем Лондонского Королевского общества, Президентом Кембриджского университета. Основные его работы относятся к теории колебаний, одним из основоположников которой он является. Он исследовал колебания струн, стержней, пластин, оболочек. В 1873 году сформулировал ряд фундаментальных теорем линейной теории колебаний, позволяющих делать качественные заключения о собственных частотах колебательных систем. В его фундаментальном труде «Теория звука» впервые отчетливо проявился единый подход к изучению колебательных и волновых процессов, имеющих различную физическую природу. Он рассмотрел сложение колебаний со случайными фазами и получил функцию распределения по частотам для результирующей амплитуды. Эта функция распределения получила его имя. Оказалось, что распределение плотности энергии абсолютно черного тела по длинам волн описывается тоже этой функцией (это распределение носит одновременно имя этого ученого и его коллеги Д.Джинса, в 1905 году независимо получившего этот результат). Крупным его открытием явилась теория поверхностных упругих волн (получивших его имя) – упругих возмущений, распространяющихся в твердом теле вдоль его свободной границы и затухающих с глубиной. Он объяснил различие между групповой и фазовой скоростями, установил соотношения между ними, заложил основы теории молекулярного рассеяния света (объяснив при этом голубой цвет неба), создал теорию разрешающей способности оптических приборов. Во всех этих разделах физики существуют формулы, процессы и теории, названные его именем.

*а) Кто этот ученый?*

*б) Назовите другие, не упомянутые в тексте, физические приборы, модельные числа и критерии, названные в честь этого ученого.*

**2.** В третьем веке до н.э. был проведен выдающийся эксперимент – впервые в истории человечества был измерен радиус Земли. В мерах длины, принятых в то время, он составил 252 тысячи стадиев. К сожалению, автор исследования не указал, пользовался ли он греческим стадием или стадием, принятым для измерений в стране, где он родился и работал. В зависимости от этого погрешность измерения по современным оценкам составила или 1,5%, или 10% (меньшее значение погрешности получается в предположении, что ученый пользовался «родным» для него стадием).

*а) Назовите имя ученого, первым в истории человечества измерившим радиус Земли.*

*б) В каком государстве жил и работал этот ученый?*

*в) В каких городах ученый проводил измерения и какая особенность географического положения этих городов позволила провести этот изящный эксперимент?*

**3.** В третьем веке до н.э. был открыт очень важный закон гидростатики. Открытию закона предшествовала большая работа по выяснению, целиком ли из золота сделана царская корона или ювелиры подмешали в корону серебро. История сохранила имя не только автора открытия, но и заказчика работы – царя (а если быть точным в титулах – тирана, тогда это слово не несло негативной окраски) Гиерона. Было обнаружено серебро в короне или нет, точных данных нет. Да и для истории науки это не так важно.

*а) Назовите имя ученого и сформулируйте закон, получивший его имя.*

*б) Назовите город и территорию, где происходили описанные события.*

*в) Оцените абсолютную погрешность измерений. Мог ли ученый, пользуясь измерительными средствами того времени, получить достоверный результат?*

**4.** Известна история о том, что итальянский ученый, живший и работавший в XVI–XVII веках, для доказательства гипотезы о независимости скорости свободно падающего тела от его массы бросал шары с Пизанской башни. Однако и он сам, и мы сейчас понимаем, что этот эксперимент имеет ограниченную точность. Ученый поставил серию более тонких экспериментов и получил экспериментальное доказательство этой гипотезы. Он также сформулировал принцип, на котором базируется вся классическая механика.

*а) Кто этот ученый?*

*б) Какие эксперименты он поставил для доказательства гипотезы?*

*в) Сформулируйте указанный в условии принцип.*

**5.** В 1818 году на одном из заседаний Французской Академии рассматривалась работа о дифракции света. Один из членов Академии, известный ученый, усомнился в правомерности считать свет волновым процессом. Председатель заседания предложил провести опыт и предсказал парадоксальный результат, который однозначно свидетельствовал бы в пользу волновой теории света. Опыт был поставлен. Была получена предсказанная дифракционная картина, которую назвали именем усомнившегося оппонента.

*а) Кто был автором работы?*

*б) Какой результат был получен?*

*в) Чьим именем был назван результат?*

*г) Кто председательствовал на собрании Академии?*

## III Международный математический турнир имени М.В.Ломоносова для учащихся 5–8 классов

### Устный командный тур

*5–6 классы*

**1.** Сколько существует четырехзначных чисел, записываемых цифрами 1 и 2?

**2.** Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов в 10 часов 12 минут?

**3.** В копилке находилось 10000 монет по одному центу. Каждый месяц тратится по 30% от содержимого копилки. Сколько монет останется в копилке через четыре месяца?

**4.** В квадрате $ABCD$ точка $K$ – середина стороны $AB$, точка $L$ – середина стороны $AD$, отрезки $CL$ и $DK$ пересекаются в точке $M$. Докажите, что треугольник $BCM$ равнобедренный.

*Штрафные задачи*

**Ш1.** Допишите к числу 987 две цифры справа так, чтобы полученное пятизначное число делилось на 5, 6, 7.

**Ш2.** Найдите два натуральных числа, разность квадратов которых равна 37.

**Ш3.** Туристу на подъем в гору с постоянной скоростью требуется 6 часов, а на спуск с постоянной скоростью – 2 часа. Через какое время после начала подъема турист вернется к основанию горы, если станет спускаться через 4 часа после начала подъема?

**Ш4.** Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке 9.

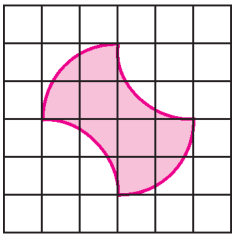


Рис. 9

*7–8 классы*

**1.** Найдите наименьшее натуральное число $n$, для которого произведение $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ делится на 1000.

**2.** В прямоугольный треугольник с катетами $a$ и $b$ вписан квадрат, у которого одна из вершин совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а противоположная вершина квадрата лежит на гипотенузе треугольника. Найдите площадь квадрата.

**3.** Может ли четырехзначное число вида $\overline{aabb}$ быть квадратом целого числа?

**4.** За какое наименьшее число ходов шахматный конь может попасть с клетки a1 на клетку h8?

**5.** В правильном треугольнике $ABC$ точка $A_1$ на стороне $BC$, точка $B_1$ на стороне $CA$ и точка $C_1$ на стороне $AB$ поставлены так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1:2$. Какую часть площади треугольника $ABC$ составляет площадь треугольника $A_2B_2C_2$, вершинами которого являются точки пересечения прямых $BB_1$ и $CC_1$, $CC_1$ и $AA_1$, $AA_1$ и $BB_1$ соответственно?

**6.** Найдите различные натуральные числа $m$ и $n$ такие, что $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{3}{17}$.

*Штрафные задачи*

**Ш1.** Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый угол которого равен $179°$?

**Ш2.** Какое наибольшее число квадратов со стороной $\sqrt{2}$ см можно разместить без наложений в квадрате со стороной 3 см?

**Ш3.** Сколько существует различных прямоугольных треугольников площадью 36 см$^2$, длины катетов которых в сантиметрах являются натуральными числами?

**Ш4.** Решите уравнение $|x-1799|=|x-2014|$.

**Ш5.** В квадрате $ABCD$ точка $K$ лежит на стороне $BC$ и $BK : KC = 1 : 2$, точка $L$ лежит на стороне $CD$ и $CL : LD = 1 : 2$, отрезки $AL$ и $DK$ пересекаются в точке $M$. Докажите, что площадь треугольника $AMD$ равна площади четырехугольника $CLMK$.

**Ш6.** Через точку внутри данного угла проведите отрезок с концами на сторонах угла, для которого данная точка является серединой.

## Письменный индивидуальный тур

*5–6 классы*

**1.** Из Грейтвилля в Литтлтаун вышел Гулливер, а навстречу ему из Литтлтауна по той же дороге уже шел лилипут. Каждый считал количество своих шагов от исходного пункта. Встретившись, они сложили свои результаты и удивились. Гулливер – тому, что сумма оказалась вдвое больше, чем он насчитал накануне, шагая от Литтлтауна до Грейтвилля, а лилипут – тому, что сумма оказалась в 6 раз меньше, чем он насчитал накануне, пройдя все расстояние от Грейтвилля до Литтлтауна. Во сколько раз шаг Гулливера длиннее шага лилипута?

**2.** Найдите наименьшее натуральное число $n$, при котором произведение $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 100.

**3.** Хозяин обещал работнику за год 12 рублей и кафтан. Но работник ушел через 7 месяцев. При расчете он получил 5 рублей и кафтан. Сколько стоит кафтан?

**4.** Где нужно взять точку $M$ (рис.10), чтобы площадь четырехугольника $ABCM$ равнялась площади треугольника $AMD$?

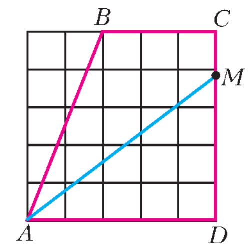


*Рис. 10*

**5.** На плоскости произвольным образом отметили 20 точек. Докажите, что точки можно попарно соединить десятью отрезками так, что любые два из этих отрезков не имеют общих точек.

*7–8 классы*

**1.** Возвращаясь с рыбалки, Алик отдал Боре несколько рыб, чтобы уравнять уловы. Если бы, наоборот, Боря отдал Алику столько же рыб, то у Алика оказалось бы в пять раз больше рыб, чем у Бори. Во сколько раз улов Алика больше улова Бори?

**2.** В какое время между 10-ю и 11-ю часами часовая и минутная стрелки часов образуют прямой угол?

**3.** Дана трапеция $ABCD$, основания которой $AD = 5$, $BC = 3$. Через точку $A$ и точку $M$ на боковой стороне $CD$ проведена прямая, делящая трапецию на две равновеликие части. Найдите отношение $CM : MD$.

**4.** Все натуральные числа, начиная с 1, выписываются подряд, получается ряд цифр 1234567891011121314 ... Определите, какая цифра стоит на 2014-м месте.

**5.** На плоскости произвольным образом отметили 2014 точек. Докажите, что точки можно попарно соединить 1007-ю отрезками так, что любые два из этих отрезков не имеют общих точек.

*Публикацию подготовили В.Альминдеров, А.Егоров, А.Кравцов, В.Крыштоп, А.Марковичев, Ж.Раббот, Л.Шляпочник*

## ИНФОРМАЦИЯ

## Московская математическая конференция школьников

Математический институт имени В.А.Стеклова РАН, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Московское математическое общество, Московский центр непрерывного математического образования, Департамент образования города Москвы и Московский институт открытого образования ежегодно проводят Московскую математическую конференцию школьников –ММКШ.

Подробную информацию о представлении, рецензировании и награждении работ можно найти на сайтах

http://www.mccme.ru/mmks/

и

http://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/pravila_mmks.htm#kaki

О конференции можно прочитать также в статье «О некоторых интересных конференциях школьников» в «Кванте» №5–6 за 2011 год.

В качестве доклада для конференции в номинации учебно-исследовательских работ школьник может подать, например, оригинальное решение задачи из «Задачника «Кванта», а самостоятельно сформулированный и доказанный результат «по мотивам» задач из «Задачника «Кванта» может претендовать и на премию по номинации научно-исследовательских работ.

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

*(см. «Квант» № 2)*

**1.** а) 99996666; б) 9998666.

Чтобы получить как можно большее число, нужно стараться сделать его старшие разряды как можно большими. По счастью, «калькуляторная» цифра 9 после переворачивания превращается в 6, поэтому ее можно использовать в этой задаче (еще можно использовать 8, 5, 2 и 0, а вот 1, 4 и 7 не годятся). Поэтому легко получить ответ к пункту а), сделав первые четыре разряда наибольшими возможными. В пункте б) число семизначное, т.е. его центральная цифра должна быть наибольшей возможной цифрой, которая после переворачивания переходит в себя, – отсюда и ответ.

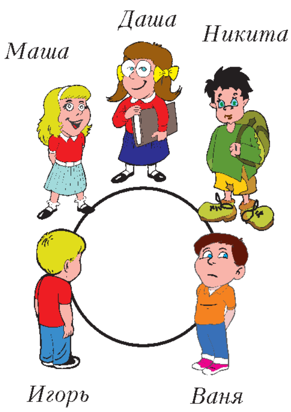


Рис. 1

**2.** Нет, не сможет.

Рассадим детей за круглый стол так, как показано на рисунке 1. По условию, любые двое, сидящие рядом, не смогут есть одну пиццу. Но если заказать две пиццы, то тогда одна из них достанется троим детям, а среди трех ребят найдутся двое сидящих рядом друг с другом.

**3.** а) Ответ показан на рисунке 2.

б) Докажем, что решение единственное. Если сумма двух верхних цифр в 7 раз меньше суммы остальных цифр, то она в 8 раз меньше суммы всех цифр. Аналогично, сумма двух левых цифр в 6 раз меньше суммы всех цифр. Значит, сумма всех цифр в кружочках делится и на 6, и на 8. Минимальное такое число – это 24, а следующее равно 48. Но сумма пяти цифр не превышает $5 \cdot 9 = 45$, поэтому сумма всех цифр равна 24.

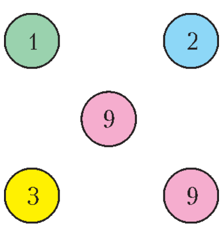


Рис. 2

Тогда сумма двух верхних цифр равна $24 : 8 = 3$, а сумма двух левых равна $24 : 6 = 4$. Легко видеть, что цифры в трех кружках слева и сверху можно разместить только двумя способами, показанными на рисунке 3. Но в первом случае сумма двух остальных цифр равна 19,

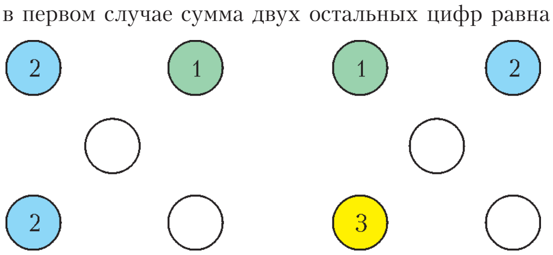


Рис. 3

что невозможно, а во втором равна 18, что возможно, только если это две девятки.

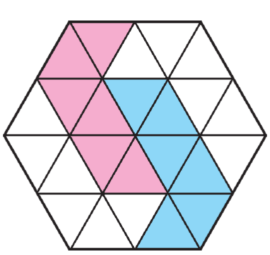


Рис. 4

**4.** Ответ показан на рисунке 4.

**5.** 45.

Отложим мандарины в сторону. Тогда останется 90 фруктов. Поскольку обезьяне мы скармливаем не больше одного мандарина, то из этих 90 фруктов каждая обезьяна съест по крайней мере два. Значит, счастливых обезьян будет не больше $90 : 2 = 45$. Покажем, как осчастливить ровно 45 обезьян:

5 обезьян получают грушу, банан, мандарин;
15 обезьян получают грушу, персик, мандарин;
25 обезьян получают персик, банан, мандарин.
И еще пять мандаринов останется!

## КОНКУРС ИМЕНИ А. П. САВИНА

*(см. «Квант» № 1)*

**11.** Пять слагаемых.

Походят, например, суммы 991 + 991 + 11 + 11 + 11 и 1991 + + 11 + 11 + 1 + 1.

Докажем, что меньшим числом слагаемых обойтись не получится. Заметим, что их сумма – 2015 – делится на 5, но не делится на 10. Пусть на 1 оканчиваются $n$ слагаемых, а на 9 оканчиваются $m$ слагаемых, и пусть $n \geq m$ (случай $n \leq m$ разбирается аналогично). Тогда каждому слагаемому, которое оканчивается на 9, можно подобрать в пару слагаемое, оканчивающееся на 1. Всего таких пар будет $m$, и сумма чисел в каждой паре будет делиться на 10. Поэтому сумма оставшихся $n - m$ чисел, оканчивающихся на 1, должна делиться на 5, т.е. их будет не меньше пяти. Значит, и всего чисел никак не меньше пяти.

**12.** Решение видно из рисунка 5.

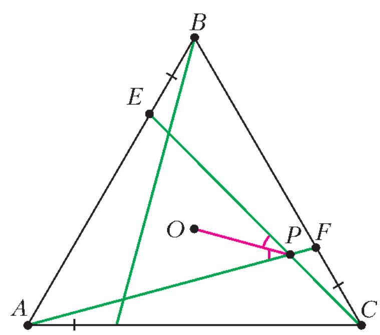


Рис. 5

**13.** $2^{19}(20!)^2$.

Закрасим клетки, в которых будут стоять нечетные числа. Нужно закрасить 20 клеток, причем в каждом столбце высоты 2 – ровно одну клетку.

Закрасить по одной клетке во всех 20 столбцах, кроме первого, – $2^{19}$ способов. После этого однозначно восстанавливаем, какую из двух клеток нужно закрасить в первом столбце, чтобы в первой строке общее число закрашенных клеток стало нечетным. Тогда и во второй строке станет нечетное количество закрашенных клеток. Поставить в закрашенные клетки нечетные числа можно 20! способами, и в не закрашенные клетки поставить четные числа – тоже 20! способами. Итого получаем $2^{19}(20!)^2$ способов.

**14.** Возьмем на плоскости две параллельные прямые, между которыми окажутся все красные точки. Начнем двигать эти прямые навстречу друг другу до тех пор, пока каждая из них не упрется в какую-нибудь красную точку. Получим полосу, на границе и внутри которой лежат все красные точки. Из условия следует, что ширина этой полосы не больше 1 (так как расстояние между любыми двумя красными точками не превосходит 1). Теперь аналогично построим вторую полосу, которая будет перпендикулярна первой. Ее ширина будет тоже не больше 1. Все красные точки должны располагаться внутри каждой из этих полос – т.е. внутри или на границе прямоугольника, по которому пересекаются полосы. Обе стороны этого прямоугольника не больше 1, поэтому его, а значит и все красные точки, можно накрыть квадратом со стороной 1.

**15.** Да.

Занумеруем места гномов подряд числами от 0 до 36. Пусть теперь гномы пересядут так: если гном сидит на месте $a$, то он пересаживается на место $2a$ (или $2a - 37$, если $2a$ окажется больше 37). Ясно, что при этом никакие два гнома не сядут на одно и то же место (тут важно, что 37 – нечетное число).

Докажем, что расстояние между любыми два гномами изменится. Пусть изначально два гнома сидели на местах $a$ и $b$, причем $a > b$. Тогда расстояние между ними – это либо $a - b$, либо $37-(a-b)$, т.е. дает такой же остаток от деления на 37, как $a - b$ или как $-(a-b)$. Аналогично, расстояние между новыми местами гномов будет давать такой же остаток от деления на 37, как $2(a-b)$ или как $-2(a-b)$. Если расстояния совпадают, то их разность делится на 37, а значит, либо $\pm(2(a-b)-(a-b))$, либо $\pm(2(a-b)+(a-b))$ делится на 37. В первом случае $a - b$ делится на 37, что невозможно, поскольку это число положительно ($a > b$) и меньше 37. Второй случай сводится к первому, так как если $3(a-b)$ делится на 37, то и $a - b$ делится на 37, поскольку 37 взаимно просто с 3.

Аналогично решается задача для любого числа гномов, не делящегося ни на 2, ни на 3.

## О МЕТОДЕ РАСКРАСКИ НА ПРИМЕРЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ

**Ответы к упражнениям**

**1.** Посмотрим на раскраску рисунка 4 из статьи. Заметим, что любой прямоугольник $1\times4$ содержит поровну (по 2) черных и белых клеток, но при данной раскраске на доске 51 черная клетка и 49 белых, т.е. не поровну. Значит, разрезать доску $10\times10$ на тетрамино $1\times4$ не удастся.

**2.** При решетчатой раскраске доски (рис. 6 из статьи) каждый прямоугольник содержит четное (0 или 2) количество черных клеток, а их на доске – нечетное количество (25), значит, разрезать доску на прямоугольники не удастся.

**3.** Заметим, что при вертикальной полосатой раскраске в 4 цвета (рис. 8 из статьи) вертикальное тетрамино содержит кратное 4 (0 или 4) количество клеток каждого цвета, а горизонтальное тетрамино содержит по одной клетке каждого цвета. Но каждого цвета на доске либо 20, либо 40 клеток, а значит, на доске будет кратное 4 количество горизонтальных тетрамино. Аналогично рассмотрев горизонтальную полосатую раскраску в 4 цвета, мы сделаем вывод о том, что количество вертикальных тетрамино также кратно 4. Но тогда в сумме на доске должно быть кратное 4 число тетрамино, что не может равняться нужному нам числу 25. Опять тот же вывод – разрезать доску $10\times10$ на прямоугольники $1\times4$ нельзя.

**4.** Применив «вертикальную» раскраску рисунка 9 из статьи, получим, что каждое вертикальное тетрамино содержит делящееся на 4 число черных клеток (либо 0, либо 4), а каждое горизонтальное тетрамино – одну черную клетку. Так как всего черных клеток 16, количество горизонтальных тетрамино делится на 4. Применив аналогичную «горизонтальную» раскраску, получим, что и количество вертикальных тетрамино делится на 4. Противоречие, так как всего тетрамино 25 штук, и значит, доску нельзя разрезать.

**5.** Заметим, что каждый прямоугольник $1\times4$ содержит в себе нечетное (1 или 3) количество черных клеток, а всего их на доске при данной раскраске четное количество – 32. Значит, и прямоугольников должно быть четное количество, т.е. не равное 25. Вывод прежний – разрезать нельзя.

**Решение задачи про разрезание доски $15\times20$ на фигурки $1\times6$**

Покрасим доску в 6 цветов по диагоналям, аналогично раскраске на рисунке 2 из статьи. Предположим, что разрезание возможно. Тогда каждая фигурка $1\times6$ будет содержать по одной клетке каждого цвета. Значит, на доске клеток всех цветов будет поровну. Покажем, что это не так.

Отрежем от нашей доски кусок $12\times20$ клеток. В этом куске всех цветов поровну (хотя бы потому, что этот кусок легко разрезать на фигурки $1\times6$, ведь одна из сторон куска делится на 6). От оставшейся части $3\times20$ отрежем кусок $3\times18$, в котором тоже всех цветов поровну. У нас останется прямоугольник $3\times2$, но в нем цветов будет не поровну! Ведь при диагональной раскраске в 6 цветов в таком прямоугольнике вообще встретится всего 4 разных цвета (проверьте!). Получили противоречие.

Аналогично можно решить и общую задачу о разрезании доски на одинаковые клетчатые полоски любой длины (сделайте это!).

## МАЛЬЧИКИ, ДЕВОЧКИ, ТАБЛИЦЫ, ГРАФЫ...

**Упражнения**

**1.** $xy$.

*Указание.* Как и в задаче 3, речь идет о разрезании прямоугольника $x\times y$ на полоски шириной 1.

**2.** $xy$.

*Указание.* Речь идет о разрезании прямоугольника $x\times y$ на квадраты.

**3.** $abc$.

*Указание*. Речь идет о распиливании прямоугольного параллелепипеда $a\times b\times c$ на слои толщиной 1.

**4.** *Указание.* Рассмотрим, как меняется максимум из количеств карт каждой масти. Сначала он был равен 13, а в конце он 0. Каждый раз, когда он уменьшается, Вася отгадывает масть.

**5.** Встанем между 21-й и 22-й рубашкой, тогда слева и справа будет по 21 рубашке. Не умаляя общности, можно считать, что слева белых рубашек не больше, чем фиолетовых. Тогда слева не больше чем 10 белых рубашек, а справа не больше чем 10 фиолетовых (потому что их должно быть столько же, сколько белых слева). Снимем все белые рубашки слева и все фиолетовые рубашки справа. После этого все оставшиеся фиолетовые рубашки будут висеть слева, а все оставшиеся белые – справа. Если мы сняли $n < 10$ рубашек какого-то цвета, то можно снять еще $10 - n$ рубашек этого цвета – выполнение желаемого условия от этого не нарушится.

**6.** См. решение задачи 5. Пете нужно, чтобы под ломаной оказался прямоугольник высотой $p$ и шириной $q$. А Васе – чтобы над ломаной оказался прямоугольник высотой $22 - p$ и шириной $22 - q$. Эти два прямоугольника пересекаются ровно по одной клеточке. Если она под ломаной – исполнится пожелание Пети, иначе – Васи.

**7.** Рассмотрим полный двудольный граф, количество вершин в долях которого совпадает с числами на доске. Когда Вася будет уменьшать одно из этих чисел на 1, будем выбрасывать из соответствующей доли графа любую вершину вместе со всеми выходящими из нее ребрами. Тогда количество ребер в графе уменьшится на степень этой вершины, т.е. на количество ребер в другой доле, что как раз равно числу, которое Вася записывает на бумажку. Значит, искомая сумма чисел на бумажке будет равна общему количеству выкинутых ребер, которое равно $xy$.

**8.** *Указание.* Лестница из $a + b - 1$ ступенек разрезается на прямоугольник $a\times b$ и две лестницы, в которых $a - 1$ и $b - 1$ ступенек соответственно (рис.6).

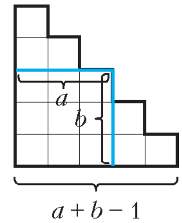


Рис. 6

**Задачи для самостоятельного решения**

**7.** Эта задача отличается от задачи 1 тем, что к подсчету детей противоположного пола добавляется подсчет детей своего пола. Но количества мальчиков, стоящих справа от мальчиков, – это 0, 1, 2, ..., 9, поэтому мальчики насчитают 45 мальчиков. Аналогично, девочки насчитают 45 девочек. Тем самым и сумма чисел мальчиков, и сумма чисел девочек увеличится на 45 (по сравнению с подсчетом задачи 1).

**8.** Пронумеруем гирьки на каждой чаше числами от 1 до 100 в порядке возрастания массы. Рассмотрим произвольную гирю. Количество гирек на противоположной чаше, которые легче нее, равно разности массы гирьки (измеренной в граммах) и ее номера. Суммы масс гирек на чашах равны (так как весы в равновесии) и суммы номеров гирек равны (потому что обе суммы равны 1 + 2 + … + 100), значит, равны и разности таких сумм.

**9.** *Первое решение.* Рассмотрим граф, в котором вершины соответствуют закрашенным клеткам и две вершины соединены ребром, если эти две клетки соседние. Тогда при каждом действии Саши в граф добавляется вершина и, возможно, несколько выходящих из нее ребер. При этом количество добавляемых ребер как раз будет равно числу, записываемому в клетку. Значит, сумма чисел в клетках будет равна числу ребер в итоговом графе, т.е. 60.

*Второе решение.* Всего пар соседних клеток 60. Каждую из этих пар мы посчитаем ровно один раз – когда будем закрашивать ту из двух клеток пары, которая закрашена позже.

**10.** Сумма останется той же. Сумма чисел в таблице равна количеству пар соседних (по стороне или вершине) клеток, одна из которых пустая, а в другой стоит мина.

**11.** а) $180 \cdot 10$; б) $180 \cdot 100$. *Указание:* рассмотрите, какой вклад вносит каждая пара соседних чисел.

**12.** 960 рублей.

Выберем двоих ребят – Петю и Васю. Рассмотрим величину $h$ – минимум из их количеств конфет. Один из этих мальчиков считает другого тогда и только тогда, когда этот минимум понижается. Сначала он был равен 8, а в конце стал равен 0. Значит, пара «Петя + Вася» внесла в кассу 8 монет. И так с каждой парой, которых всего $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$, откуда получаем ответ $120 \cdot 8 = 960$.

**13.** Обозначим числа на доске $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Представим себе разные шары $n$ цветов: первого цвета $a_1$ штук, второго $a_2$ штук, …, последнего $a_n$ штук. Выпишем в тетради всевозможные комбинации из $n$ разноцветных шаров (их $a_1 a_2 \ldots a_n$ штук). Когда $k$-е число на доске уменьшат на 1, выкинем шарик $k$-го цвета и вычеркнем из тетради всевозможные комбинации с этим шариком – количество вычеркнутых комбинаций как раз равно произведению всех чисел на доске, кроме $k$-го, т.е. равно числу, записываемому на листок. К тому моменту, как все числа на доске станут нулями, мы выкинем все шарики, а значит, вычеркнем все комбинации из тетради. Всего вычеркнуто $a_1 a_2 \ldots a_n$ комбинаций, следовательно, как раз такова сумма чисел на листке.

**14.** $\left(N^3 - N\right)/3$.

Около каждой кучи камней будем представлять себе деревянный куб со стороной $k$ см, где $k$ – количество камней в этой куче. Тогда если кучу из $a + b$ камней разделили на кучи из $a$ и $b$ камней, то из соответствующего ей деревянного куба со стороной $(a + b)$ см сделали куб со стороной $a$ см и куб со стороной $b$ см. При этом выбросили $(a+b)^3 - a^3 - b^3 = 3ab(a+b)$ см$^3$ древесины, что как раз в 3 раза больше записанного числа. Значит, искомая сумма в 3 раза меньше количества древесины, выброшенного в сумме за все действия, которое равно $\left(N^3 - N\right)$ см$^3$. Отсюда получаем ответ.

**15.** 0.

Будем называть камни из одной кучи *знакомыми*, из разных – *незнакомыми*. Тогда доход Сизифа за одно перетаскивание равен изменению количества пар знакомых камней. Так как в конечный момент все камни оказались в исходных кучах, то общее изменение количества знакомств равно нулю, а значит, и доход Сизифа равен нулю.

## КИНЕМАТИКА ОТРЕЗКА

**1.** $l = \dfrac{w - v_{\text{тр}}}{v + v_{\text{тр}}} l_0 = 60$ м.

**2.** 115 ч; 57 ч; 38 ч. *Указание.* Здесь не три задачи, а одна. Первое «условие бега» объединяет в единую группу всех $N$ зайцев, второе условие объединяет зайцев в две подгруппы по $N/2$ зайцев в каждой, третье – в три подгруппы по $N/3$ зайцев в каждой.

**3.** $v_1 = 2$ мм/мин; $v_2 = 6$ мм/мин.

**4.** $v_{B\max} = 2v_A = 20$ м/с при $\alpha = 0$, т.е. в конце движения.

**5.** $t = 10$ с. **6.** $v_A = \dfrac{v}{2\sin\alpha}$. **7.** $v_{\text{л}} = \dfrac{v}{\cos\alpha}$.

**8.** $v_A = v\sqrt{\dfrac{4r^2}{(R-r)^2} - 3}$.

**9.** Оптимальная точка $O$ лежит на расстоянии 300 м от точки $M_1$; длина самого короткого пути составляет 1130 м.

## XXIII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

*Устный командный тур*

### Математика

**1.** 33 года.

Пусть $N$ – продолжительность жизни, $k$ – срок царствования Александра Македонского. По условию,

$$\begin{cases} \dfrac{N-5}{4} = k - 5, \\ \dfrac{N+9}{2} = k + 9. \end{cases}$$

Решив эту систему, получаем ответ.

**2.** Не может.

Пусть $a$, $b$, $c$ – различные цифры, не равные нулю. Существуют 6 трехзначных чисел, составленных из этих цифр:

$$\overline{abc},\ \overline{acb},\ \overline{bac},\ \overline{bca},\ \overline{cab},\ \overline{cba}.$$

Сложив их, получим

$$200 \cdot (a+b+c) + 20 \cdot (a+b+c) + 2 \cdot (a+b+c) = = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot (a+b+c).$$

Поскольку, очевидно, $a + b + c < 37$, полученная сумма делится на простое число 37, но не делится на $37^2$, так что она не является полным квадратом.

Если же одна из цифр (например, $c$) равна нулю, то сумма всех указанных чисел равна

$$(100a + 10b) + (100a + b) + (100b + 10a) + (100b + a) = = 4 \cdot 53 \cdot (a+b)$$

и также не является полным квадратом, поскольку она делится на простое число 53 и не делится на его квадрат (очевидно, $a + b < 53$).

**3.** −1 или 2.

Из условия следует, что ни одно из данных чисел не равно нулю, тогда получаем $\dfrac{b+c-a}{a} = \dfrac{a+c-b}{b} = \dfrac{a+b-c}{c}$. Добавив к каждой дроби число 2, получим, что

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c}.$$

Отсюда следует, что либо $a + b + c = 0$, либо $a = b = c$. В первом случае $\dfrac{a+b}{c} = -1$, а во втором $\dfrac{a+b}{c} = 2$.

**4.** Не может.

Так как число диагоналей выпуклого $n$-угольника равно $\dfrac{n(n-3)}{2}$, получаем уравнение $n^2 - 3n - 4028 = 0$. У него нет целых корней, в чем можно убедиться, например, вычислив его дискриминант. Можно, впрочем, заметить, что при $n = 65$ число $n^2 - 3n$ равно 4020, а при $n = 66$ оно равно 4159, так что значение 4028 при целых значениях $n$ не достигается. Наконец, можно воспользоваться тем, что число $n(n-3)$ и число 4028 при делении на 3 дают разные остатки: первое из них дает остаток 0, если $n$ делится на 3, и остаток 1, если при делении на 3 число $n$ (а значит, и число $n-3$) дает в остатке 1 или 2; а второе число дает остаток 2.

**5.** $\frac{a+b+c}{2}$.

Проведем через вершину $A$ прямую $l$, параллельную стороне $BC$. Пусть она пересекает биссектрисы внешних углов при вершинах $B$ и $C$ в точках $K$ и $L$ соответственно. Треугольник $KAB$ – равнобедренный (его углы при вершинах $K$ и $B$ равны половине внешнего угла треугольника $ABC$ при вершине $B$), поэтому $AK = c$. Аналогично, треугольник $ALC$ – равнобедренный, следовательно, $AL = b$. Поэтому средняя линия $MN$ трапеции $KLCB$ равна полусумме ее оснований.

**6.** 21.

Пусть $n$ – количество учеников, каждый из которых получил хотя бы одну конфету. Тогда число полученных ими конфет не меньше чем $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (используем, например, формулу суммы $n$ первых членов арифметической прогрессии). При этом должно, конечно, выполняться неравенство $\frac{n(n+1)}{2} \ge 200$. Так как 20 – наименьшее значение $n$, удовлетворяющее этому неравенству (при $n = 19$ оно еще не удовлетворяется), то наименьшее количество учеников в классе равно 21. Если же учеников 20 или меньше, можно так раздать им 200 конфет, что все получат разное число конфет (читателю предлагается убедиться в этом самостоятельно).

**7.** Восемь.

Всякий черный (белый) слон бьет не более четырех черных (соответственно, белых) клеток, стоящих на границе шахматной доски. Всего же таких клеток – 14 черных (и 14 белых). Поэтому трех черных (и трех белых) слонов не хватит, т.е. слонов должно быть не менее 8 (по 4 каждого цвета). Если же восемь слонов расставить, например, на полях d1, d3, d5, d7, e1, e3, e5, e7, то все поля доски будут под боем.

**8.** Нет.

Если существует указанное в условии число $x$, то и число $x^{16} = \left(x^8\right)^2$ – тоже целое. Но тогда число $x^3 = \frac{x^{19}}{x^{16}}$ – рациональное. Вместе с ним число $x^9\left(x^3\right)^3$ – тоже рациональное, а тогда и само число $x = \frac{x^9}{x^8}$ – рациональное число. Пусть теперь $x = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь, причем $q > 1$. Но тогда и число $x^8 = \frac{p^8}{q^8}$ – тоже несократимая дробь, т.е. нецелое число, в противоречии с условием.

**9.** Второй игрок.

Выигрывает второй игрок, применяя «симметричную стратегию»: на каждый ход первого он отвечает ходом, симметричным ходу первого относительно центра доски. Вначале – когда доска пустая, ситуация на доске симметрична. Первый игрок каждым своим ходом нарушает симметрию, а второй ее восстанавливает. Поэтому место для хода второго игрока всегда будет – ведь если первый куда-то поставил свою доминошку, то симметричное место пусто, и у второго есть, куда ходить.

**10.** $\frac{mn}{2}$.

Докажем, что данный четырехугольник – ромб. Предположим что он не является параллелограммом, тогда обе его диагонали (или хотя бы одна из них) не делятся в точке пересечения пополам. Пусть, для определенности, $OC > AO$, $BD \ge OD$. Отложим на отрезках $OC$ и $OB$ отрезки $OA'$ и $OD'$, соответственно равные отрезкам $AO$ и $OD$. Треугольники $AOD$ и $A'OD'$ равны, однако периметр треугольника $OBC$ больше периметра треугольника $A'OD'$ – противоречие. Итак, данный четырехугольник – параллелограмм, но тогда из равенства периметров, например, треугольников $AOB$ и $BOC$ следует, что $AB = BC$. Мы получили, что $ABCD$ – ромб, но его площадь равна половине произведения его диагоналей.

## Физика

**1.** $n = \left[\frac{R\operatorname{ctg}\alpha}{r}\right]$. **2.** $\frac{\rho_г}{\rho_в} = \frac{V_1 - V_3}{V_1 - V_2} = 10{,}5$.

**3.** $\Delta p = \rho g(H - h)$.

**4.** Стержень будет вращаться в горизонтальной плоскости вокруг своего центра масс, а сам центр масс будет двигаться в вертикальной плоскости по параболе.

**5.** Измерим высоту $h$ подъема струи и по формуле $v = \sqrt{2gh}$ оценим скорость струи.

**6.** $Q_ш = -\frac{r}{R}q$. **7.** $U_{CD} = 4{,}17$ В.

**8.** На $2/5$ своей длины.

**9.** $L = \frac{3}{2}F = 75$ см ; $\frac{W_{вх}}{W_{вых}} = \frac{1}{4}$.

**10.** См. рис.7.

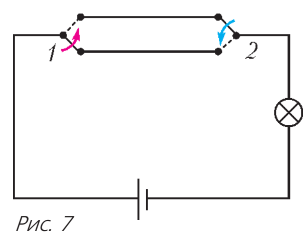


*Рис. 7*

*Письменный индивидуальный тур*

## Математика

**1.** Существует.

Поскольку, очевидно, последние $n$ цифр числа $\left(10^n - 1\right)^3$ – девятки [1], получаем ответ.

**2.** 2.

По условию,

$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1} \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+2}{\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)} = \frac{2}{xy+1},$$

откуда получим, что $\left(x^2+y^2+2\right)(xy+1) = 2\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)$. Преобразовав последнее равенство, приходим к соотношению $(x-y)^2(1-xy) = 0$. Так как, по условию, $x \ne y$, получаем, что $xy = 1$. Подставив в данное в условии выражение $\frac{1}{x}$ вместо $y$, получим ответ.

**3.** а) Можно; б) нельзя.

а) Данная арифметическая прогрессия состоит, очевидно, из всех натуральных чисел, дающих при делении на 23 остаток 2. Поскольку число 24 дает при делении на 23 остаток 1, а для нахождения остатка при делении произведения натуральных чисел на некоторое число надо перемножить остатки при делении сомножителей на это число, все члены бесконечной геометрической прогрессии $u_n = 2\cdot 24^n$ дают при делении на 23 остаток 2 и поэтому принадлежат данной арифметической прогрессии.

б) Предположим, что ответ положительный – извлечь геометрическую прогрессию можно. Пусть $1 + a\sqrt{3}$, $1 + b\sqrt{3}$, $1 + c\sqrt{3}$ – три последовательных члена этой геометрической

---

[1] Действительно, $\left(10^n - 1\right)^3 = 10^{3n} - 3\cdot 10^{2n} + 3\cdot 10^n - 1$, откуда видно, что у суммы первых трех слагаемых $n$ нулей в конце десятичной записи.

прогрессии, причем $a < b < c$. Тогда (по свойству членов геометрической прогрессии) $\left(1+a\sqrt{3}\right)\left(1+c\sqrt{3}\right)=\left(1+b\sqrt{3}\right)^2$, откуда после простых преобразований получим, что $a+c-2b = \left(b^2-ac\right)\sqrt{3}$. Поскольку $\sqrt{3}$ – иррациональное число, а числа $a$, $b$ и $c$ – натуральные, последнее равенство возможно, только если

$$\begin{cases} a+c-2b=0, \\ b^2-ac=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=2b, \\ ac=b^2, \end{cases}$$

откуда получим $a = b = c$, что противоречит выбору этих чисел.

**4.** Нельзя.

Предположим, что центр $O$ круга радиуса 1, описанного около треугольника $ABC$ с единичной площадью, находится вне этого треугольника. Тогда найдется его сторона (пусть это будет сторона $BC$) такая, что точки $A$ и $O$ лежат по разные стороны от прямой $BC$. В этом случае, очевидно, $BC < 2$ (сторона меньше диаметра круга), а высота треугольника, опущенная из вершины $A$, меньше 1 (радиуса круга). Поэтому площадь треугольника $ABC$ оказывается меньше чем $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1=1$, что противоречит выбору треугольника. Итак, если площадь треугольника $ABC$ равна 1, то точка $O$ находится внутри или на границе треугольника. Поэтому три таких треугольника поместить в данный круг без пересечений нельзя.

**5.** $x = y = 2$.

Поскольку $x = y = 1$ не дают решения данного уравнения, имеем

$$\begin{cases} x \ge 2, \\ y \ge 2. \end{cases}$$

Правая часть данного уравнения дает при делении на 3 остаток 2; первое слагаемое левой части – остаток 0, а второе слагаемое – при четных $y$ дает остаток 1, а при нечетных – остаток 2, при этом второе слагаемое вычитается.[2] Поэтому данное уравнение может соблюдаться лишь при четных значениях $y$.

Аналогичное рассуждение (с делимостью на 4) показывает, что $x$ тоже должен быть четным числом.

Итак,

$$\begin{cases} x = 2k, \\ y = 2l, \end{cases}$$

где $k$ и $l$ – целые числа. Поставив эти значения неизвестных в данное уравнение, получаем

$$3^{2k}-2^{2l}=5 \Leftrightarrow \left(3^k-2^l\right)\left(3^k+2^l\right)=5.$$

Поскольку 5 – простое число, второй сомножитель левой части последнего равенства, очевидно, положителен, а первый сомножитель меньше второго, число 5 может быть разложено в указанное произведение целых сомножителей единственным образом:

$$\begin{cases} 3^k-2^l=1, \\ 3^k+2^l=5. \end{cases}$$

Почленно сложив уравнения системы, а затем почленно вычтя из второго уравнения системы первое, получаем

$$\begin{cases} 3^k=3, \\ 2^l=2, \end{cases}$$

откуда находим, что $k = l = 1$.

[2] При делении на 3 остаток 2 дают те же числа, что и остаток (−1): например, одновременно и $2 = 3\cdot 1-1$, и $2 = 0\cdot 3+2$, так что можно считать остатком при делении числа 2 на число 3 и (−1), и 2.

**6.** $\dfrac{a^2\sin\alpha}{2}$.

Пусть $K$ – точка пересечения прямых $CE$ и $AB$. Тогда $AF$ – медиана в прямоугольном треугольнике $KBF$ (так как $AE$ – средняя линия в треугольнике $KBC$). Поэтому $AF = AB = a$. Значит,

$$S_{ABF}=\frac{1}{2}AB\cdot AF\cdot\sin\angle BAF=\frac{a^2\sin\alpha}{2}.$$

**7.** а) 1; б) 1; в) 5; г) 40.

Решим задачу в общем виде. Выпишем соотношения для $n + 1$ членов последовательности, начиная с $x_1$:

$$|x_1|=|x_0+1|,$$
$$|x_2|=|x_1+1|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|x_{n+1}|=|x_n+1|.$$

Возведем все эти равенства в квадрат:

$$x_1^2=x_0^2+2x_0+1,$$
$$x_2^2=x_1^2+2x_1+1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{n+1}^2=x_n^2+2x_n+1,$$

а затем почленно сложим. Получим

$$x_{n+1}^2=2\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)+n+1,$$

откуда следует, что

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{x_{n+1}^2-(n+1)}{2},$$

поэтому

$$\left|x_1+x_2+\ldots+x_n\right|=\frac{\left|x_{n+1}^2-(n+1)\right|}{2}\ge\frac{\left|a^2-(n+1)\right|}{2},$$

где $a^2$ – ближайший к числу $(n + 1)$ полный квадрат, причем той же четности, что и число $(n + 1)$.

Осталось доказать, что в полученном неравенстве достигается равенство, т.е. что существует удовлетворяющая условию последовательность, для которой $x_{n+1}=a$.

В случае а):

$$\left|x_1+x_2+\ldots+x_5\right|=\frac{\left|x_6^2-6\right|}{2}\ge\frac{|4-6|}{2}=1.$$

Равенство достигается для последовательности $x_0=0$, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-1$, $x_4=0$, $x_5=1$, $x_6=2$.

В случае б): $x_0=0$, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-1$, $x_4=0$, $x_5=1$, $x_6=2$, $x_7=3$.

В случае в):

$$\left|x_1+x_2+\ldots+x_{2014}\right|\ge\frac{\left|a^2-2015\right|}{2}=\frac{|2025-2015|}{2}=5,$$

поскольку ближайший к числу 2015 нечетный квадрат – это $45^2$ = 2025. Пример последовательности удобно начинать строить «с конца»: $x_{2015}=45$, $x_{2014}=44$,..., $x_{1971}=1$, $x_{1970}=0$, а далее на местах с нечетными номерами $k$ ставим $x_k=-1$, а при четных значениях $k$ ставим $x_k=0$. (Сравните с примерами, построенными в предыдущих случаях.)

В случае г): ближайший к 2016 четный квадрат – число $44^2 = 1936$, и мы строим последовательность, для которой 2016-й член равен 44:

$$x_{2016}=44,\ x_{2015}=43,\ \ldots,\ x_{1973}=1,\ x_{1972}=0,$$

а дальше, как и в предыдущих пунктах, $x_k=-1$ при нечетных значениях $k$ и $x_k=0$ при четных.

*Замечание*. Аналогичные рассуждения показывают, что при любом $n$ существует последовательность $x_0=0$, $x_1$, $x_2$, ...

…, $x_n$, $x_{n+1}$ такая, что

$$\left|x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right| = \frac{\left|a^2 - (n+1)\right|}{2},$$

где $a^2$ – ближайший к числу $n$ + 1 полный квадрат, имеющий ту же четность, что и само число $n$ + 1.

## Физика

**1.** Рассмотрим скольжение стержня вдоль гладкой стены и гладкого пола (рис.8). Понятно, что при таком движении центр масс стержня движется по окружности радиусом $L$. Расставим все силы и укажем скорость центра масс стержня $v$. При рассмотрении закона сохранения энергии следует учесть кинетическую энергию не только поступательного движения центра масс стержня $\frac{1}{2}Mv^2$, но и вращательного движения стержня $\frac{1}{2}I\omega^2$, где $I = \frac{1}{3}ML^2$ – момент инерции стержня относительно центра масс и $\omega$ – мгновенная угловая скорость вращения стержня. Понятно, что $v = \omega L$. Закон сохранения энергии имеет вид

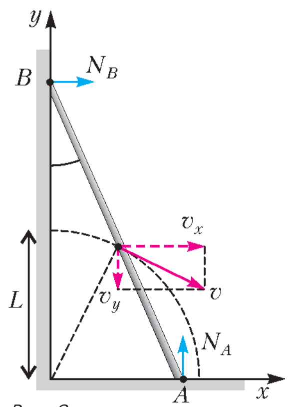


Рис. 8

$$MgL = \frac{Mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + MgL\cos\alpha,$$

откуда следует

$$\omega^2 = \frac{3}{2}\frac{g}{L}(1 - \cos\alpha).$$

Теперь найдем силу реакции опоры стены:

$$N_B = Ma_x = M\frac{dv_x}{dt} = M\frac{d(\omega L\cos\alpha)}{dt} =$$

$$= ML\left(\frac{d\omega}{dt}\cos\alpha - \omega\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}\right) = ML\left(\frac{d\omega}{dt}\cos\alpha - \omega^2\sin\alpha\right).$$

Производную $\frac{d\omega}{dt}$ найдем, продифференцировав выражение закона сохранения энергии:

$$2\omega\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{2}\frac{g}{L}\sin\alpha\cdot\frac{d\alpha}{dt}, \text{ откуда } \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4}\frac{g}{L}\sin\alpha.$$

Окончательно получим

$$N_B = \frac{3}{4}Mg\sin\alpha(3\cos\alpha - 2).$$

Отрыв происходит при условии $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. В момент отрыва скорость нижнего конца стержня равна $v_x = \frac{\sqrt{3}}{2}v$, скорость верхнего конца стержня равна $v_y = \frac{1}{2}v$, где $v = \sqrt{\frac{Lg}{2}}$.

**2.** За малый промежуток времени $\Delta t$ поршень, движущийся со скоростью $u$, опускается на расстояние $u\Delta t$ и выдавливает пасту объемом $v\Delta tS$, где $S = \pi r^2$. При этом площадь пятна на поверхности увеличивается на $\Delta S = 2\pi R\Delta R$, где $\Delta R = v\Delta t$, а объем пасты на поверхности увеличивается на $\Delta Sh$. Объем, вытесненный из цилиндра за время $\Delta t$, равен увеличению объема пятна на столе за то же самое время:

$$u\Delta t\pi r^2 = 2\pi Rv\Delta th,$$

откуда получаем

$$v = \frac{ur^2}{2Rh} = 2 \text{ см/с}.$$

**3.** По условию задачи, в силу не герметичности помещения, процесс изобарный. Внутренняя энергия воздуха в комнате равна

$$U = \nu C_V T = \nu\cdot\frac{5}{2}RT = \frac{5}{2}p_0V,$$

т.е. зависит от температуры. Значит, внутренняя энергия воздуха в комнате не меняется. Теперь найдем работу газа. Запишем уравнение состояния для воздуха в комнате после прогрева:

$$p_0V = \nu_2RT_2$$

и для того же количества воздуха в комнате в начальный момент:

$$p_0(V - \Delta V) = \nu_2RT_1,$$

где $\Delta V$ – объем газа, вышедшего на улицу. Работа совершается при постоянном давлении, поэтому

$$A = p_0\Delta V.$$

Отсюда получаем

$$A = p_0V\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = 1 \text{ МДж}.$$

**4.** Прежде всего найдем разность потенциалов между точками *1* и *2* электрической схемы при произвольных значениях $R$ и $r$ в отсутствие диода. Пусть на схему подано постоянное напряжение $U$ и при этом потенциал минусовой клеммы равен нулю. Тогда потенциал точки *1* найдем из рассмотрения обхода по верхней части электрической цепи:

$$\varphi_1 = \frac{Ur}{R+r}.$$

Потенциал точки *2* получим аналогично, пройдя по нижней части цепи:

$$\varphi_2 = \frac{UR}{R+r}.$$

В области значений $r < R$ потенциал точки *1* меньше потенциала точки *2*. Следовательно, после включения диода ток через диод не потечет, и сопротивление цепи будет равно

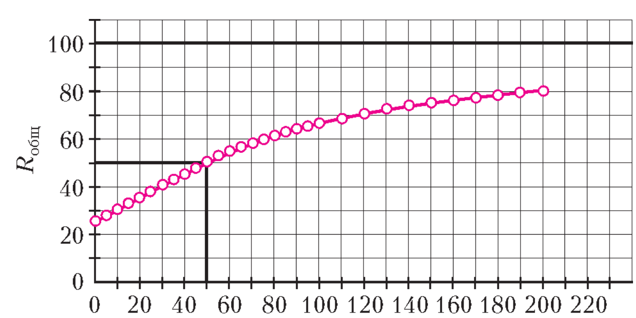


Рис. 9

$$R_{общ} = \frac{R+r}{2}.$$

При $r > R$ потенциал точки *1* выше потенциала точки *2*, поэтому ток через диод потечет и сопротивление цепи будет равно

$$R_{общ} = \frac{2Rr}{R+r}.$$

График искомой зависимости приведен на рисунке 9.

**5.** Траектория груза состоит из дуги окружности, пока нить натянута, и параболы, проходящей через гвоздь и продолжающей дугу по касательной к ней, когда нить не натянута (рис.10). В точке перехода к параболе натяжение нити обраща-

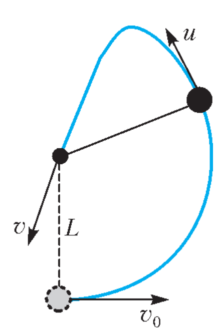


Рис. 10

ется в ноль. Из второго закона Ньютона для вращательного движения

$$\frac{mu^2}{L} = mg\sin\alpha ,$$

где $\alpha$ – угол, образуемый нитью с горизонталью, находим

$$u^2 = Lg\sin\alpha .$$

Условия попадания в гвоздь имеют вид

$$L\cos\alpha = u\sin\alpha \cdot t , \quad L\sin\alpha = \frac{gt^2}{2} - u\cos\alpha \cdot t .$$

Отсюда найдем

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{3} .$$

Из закона сохранения энергии (или из кинематики) получим

$$v^2 = u^2 + 2Lg\sin\alpha , \text{ или } v^2 = 3Lg\sin\alpha ,$$

откуда

$$v = \sqrt{3Lg\sin\alpha} = \sqrt{\sqrt{3}Lg} = 4{,}2 \text{ м/с} .$$

**6.** Как видно из рисунка 11, тень образуется как в результате перекрытия кругом падающего пучка I, ограниченного крайними лучами 1 и 2, так и перекрытия кругом отраженного

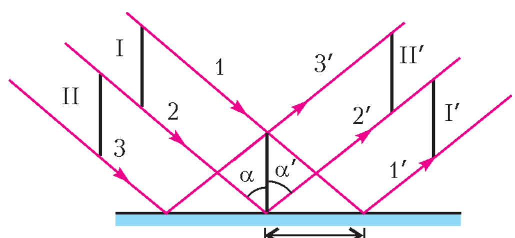


*Рис. 11*

пучка II, ограниченного лучами $2'$ и $3'$. Поскольку при падении любого луча на зеркало угол падения $\alpha$ равен углу отражения $\alpha'$, то площади падающих и отраженных пучков равны. Следовательно, на экране тень от круга будет наблюдаться в виде двух соприкасающихся кругов того же радиуса. Таким образом, площадь тени равна

$$S = 2\pi r^2 = 628 \text{ см}^2 .$$

**7.** Протон, прошедший разность потенциалов $U$, приобретает скорость $v = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}$. При попадании в область магнитного поля протон начинает двигаться по дуге окружности, радиус которой определяется силой Лоренца:

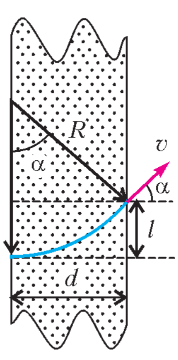


*Рис. 12*

$$qvB = \frac{mv^2}{R} , \text{ откуда } R = \frac{mv}{qB} = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}} ,$$

и вершина которой лежит на границе области магнитного поля (рис.12). Угол отклонения вектора скорости равен центральному углу поворота радиуса окружности:

$$\sin\alpha = \frac{d}{R} = dB\sqrt{\frac{q}{2mU}} = 0{,}5 , \quad \alpha = 30^\circ .$$

Смещение протона равно

$$l = R(1-\cos\alpha) = \sqrt{\frac{2mU}{qB^2}}(1-\cos\alpha) = 2{,}6 \text{ см} .$$

*История научных идей и открытий*

Математика

**1. Утверждение.** *Существует бесконечно много простых чисел.*

**Доказательство.** Предположим противное: простых чисел конечное число. Занумеруем их в порядке возрастания: $p_1$, $p_2, \ldots, p_n$. Рассмотрим число $N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. Это число, во-первых, не делится, очевидно, ни на одно из выписанных (по предположению – всех!) простых чисел, а во-вторых, больше каждого из них. Но тогда оно или тоже является простым или делится на не «учтенное» или простое число. В любом случае, получено еще одно число, которое должно было быть в списке. Противоречие.

**2.** Пусть точка $M(x;\ x^2)$ – произвольная точка графика функции $y = x^2$. Будем искать такую точку $F(0;\ a)$ и такую прямую $y = -a$ (где $a > 0$), что расстояние $MF$ равно расстоянию от точки $M$ до указанной прямой. Используя формулу расстояния между двумя точками плоскости,[3] получим, что $MF = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - a\right)^2}$, поэтому должно выполняться равенство

$$\sqrt{x^2 + \left(x^2 - a\right)^2} = \left|x^2 + a\right| \Leftrightarrow$$

$$x^2 + x^4 - 2ax^2 + a^2 = x^4 + 2ax^2 + a^2 \Leftrightarrow x^2(1-4a) = 0 .$$

Поскольку все эти равенства должны выполняться при всех значениях $x$, получаем $1 - 4a = 0$, откуда $a = \dfrac{1}{4}$.[4] Итак, график функции $y = x^2$ – парабола с точки зрения древних.

**3.** Не может.

Выпишем остатки от деления первых чисел Фибоначчи на 7: 1, 1, 2, 3, 5, 1, 6, 1, 0, … Дальше, как легко проверить, остатки повторяются с периодом 16, а нули – с периодом 8, так что

*каждое восьмое число Фибоначчи делится на 7.*

С другой стороны, выписывая остатки от деления первых чисел Фибоначчи на 3, получим: 1, 1, 2, 0, 2, 2, 1, 0, 1, 1, … , т.е.

*каждое четвертое число Фибоначчи делится на 3.*

Таким образом, если число Фибоначчи делится на 7, то оно делится и на 3, т.е. не может быть степенью семерки.

**4.** Не существует.

Предположим, что такой многогранник существует. Каждая его грань содержит ровно 6 ребер, поэтому суммарное количество ребер равно $6P$. При этом каждое ребро посчитано дважды и поэтому

$$P = \frac{6\Gamma}{2} = 3\Gamma. \qquad (*)$$

Пусть теперь $k_1$, $k_2$, …, $k_n$ – количества ребер, выходящих из всех $n$ вершин многогранника (очевидно, $k_i \ge 3$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$). Снова подсчитаем суммарное количество ребер. В сумме $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ каждое ребро снова подсчитано дважды, поэтому $2P = k_1 + k_2 + \ldots + k_n \ge 3B$, а в силу (*) получаем, что $6\Gamma \ge 3B$, т.е. $2\Gamma \ge B$. Далее, по теореме Эйлера, $B + \Gamma = 2 + P = 2 + 3\Gamma$, т.е. $B = 2 + 2\Gamma \ge 2 + B$ – противоречие.

**5.** Пусть $p$ – произвольное простое число. По теореме Гаусса, существует такое натуральное число $g$ и натуральные числа $k$ и $l$, что числа $g^k - 2$ и $g^l - 3$ делятся на $p$. Если $k = 2m$ – четно, то, полагая $x = g^m$, получим, что $x^2 - 2$ делится на $p$. Аналогично при четном $l = 2n$ число $x^2 - 3$, где $x = g^n$, делится на $p$. Наконец, если оба числа $k$ и $l$ нечетны, то число $g^k g^l = g^{k+l}$, очевидно, дает остаток 6 при делении на $p$, при этом показатель $k + l = 2s$ четен, поэтому при $x = g^s$ число $x^2 - 6$ делится на $p$.

[3] $MN = \sqrt{\left(x_M - x_N\right)^2 + \left(y_M - y_N\right)^2}$.

[4] Точку $F$ называют *фокусом*, а указанную прямую – *директрисой* параболы.

Физика

**1.** а) Джон Уильям Стретт, лорд Рэлей. б) Диск Рэлея – прибор для измерения колебательной скорости частиц в звуковой волне и силы звука. Критерий Рэлея – условие, согласно которому изображение двух близлежащих точек можно видеть раздельно, если расстояние между центрами дифракционных пятен каждого из изображений не меньше радиуса первого темного дифракционного кольца. Число Рэлея – модельное безразмерное число, определяющее поведение жидкости под воздействием градиента температуры; если число Рэлея больше некоторого критического значения, равновесие жидкости становится неустойчивым и возникают конвективные потоки.

**2.** а) Эратосфен Киренский. б) Египет. в) Александрия и Сиена; эти города лежат на одном меридиане.

**3.** а) Архимед, закон Архимеда. б) Сиракузы в Сицилии. в) Общая масса короны составляет единицы килограммов, что соответствует объемам в сотни миллилитров. Если доля серебра в короне составляет первые десятки процентов, то разница объемов при одинаковой массе короны из чистого золота и из сплава составляет десятки миллилитров. Это вполне измеримый объем.

**4.** а) Галилео Галилей. б) Скатывание шаров по наклонной плоскости. в) Принцип относительности Галилея.

**5.** Огюстен Жан Френель. б) При дифракции света на круглом отверстии при определенном расстоянии от отверстия до экрана, на котором наблюдается дифракционная картина, в центре образуется темное пятно. в) Пятно Пуассона; усомнившимся оппонентом был Симеон Дени Пуассон. г) Франсуа Жан Доминик Араго.

**III Международный математический турнир имени М.В.Ломоносова для учащихся 5 – 8 классов**

*Устный командный тур*

5-6 классы

**1.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

Любое четырехзначное число, записываемое цифрами 1 или 2, можно получить из трехзначного, записываемого этими цифрами, приписав впереди к трехзначному числу цифру 1 или 2. Поэтому количество четырехзначных чисел, записываемых цифрами 1 или 2, в два раза больше подобных трехзначных чисел. В свою очередь, трехзначных чисел в два раза больше количества двузначных, а их в два раза больше количества однозначных, которых ровно два.

**2.** $126°$.

В момент, когда часы показывают 10 часов, угол между минутной и часовой стрелками часов составляет $60°$. Минутная стрелка часов за одну минуту перемещается на угол $\frac{360°}{60} = 6°$, часовая стрелка – на угол в 12 раз меньше. Поэтому за 12 минут часовая стрелка переместится на $6°$, минутная – на $6° \cdot 12 = 72°$, и угол между стрелками составит $60° - 6° + 72° = 126°$.

**3.** 2401.

Каждый месяц остается 70% монет, находившихся в копилке на начало месяца; 70% от 10000 равно 7000, 70% от 7000 равно 4900, 70% от 4900 равно 3430, 70% от 3430 равно 2401. Можно сказать по-другому – в копилке через четыре месяца останется

$$10000 \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401 \text{ монет.}$$

**4.** Изобразим на клетчатой бумаге квадрат $ABCD$ со стороной в 10 клеточек (рис. 13). Дополнительно к линиям, указанным в условии задачи, проведем отрезок, соединяющий вершину $B$ с серединой стороны $CD$, и обозначим точку его пересечения с $CL$ через $N$. Прямоугольные треугольники $BCN$ и $BMN$ равны, так как равны их катеты $CN$ и $MN$, а катет $BN$ – общий. Поэтому равны их гипотенузы: $BC = BN$, и треугольник $MBC$ – равнобедренный.

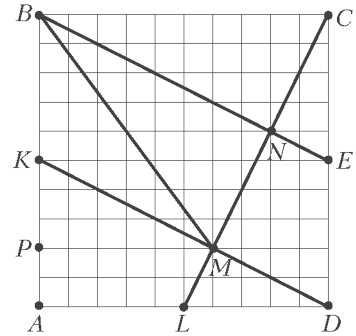


Рис. 13

Равенство отрезков $BC$ и $BN$ можно обосновать иначе. Обозначив точку пересечения горизонтальной линии, на которой лежит точка $M$, через $P$, можем сказать, что $MP = 6$, $BP = 8$ и что треугольник $BMP$ – прямоугольный, а его гипотенуза $BM$ равна 10. (Такие треугольники были известны еще в Древнем Египте.)

*Штрафные задачи*

**Ш1.** 98700.

Заметим, что 987 делится на 7 и на 3. Последней цифрой искомого числа должна быть или цифра 0, или цифра 5. Но на 6 может делиться только четное число, значит, последняя цифра 0. Если в качестве предпоследней цифры взять 7, то полученное число не делится на 3. Если предпоследняя цифра 0, то полученное число делится на 5, 6, 7.

**Ш2**. 19 и 18.

В силу формулы $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$ нужно найти разложение простого числа 37 на множители. Но тогда $m - n = 1$, $m + n = 37$.

**Ш3**. 5 часов 20 минут.

На спуск с высоты, на которую турист поднимался 4 часа, по условию задачи ему потребуется две трети от 2 часов, т.е. 1 час 20 минут.

**Ш4**. Площадь фигуры равна площади 8 клеток.

7–8 классы

**1.** 21.

Из четырех последовательных натуральных чисел на 5 может делиться только одно. Поэтому в произведении $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ один из четырех сомножителей должен делиться на 125. Легко проверить, что если $n = 121$, то произведение делится и на 8.

**2.** $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$.

Обозначим сторону квадрата через $x$. Вписанный квадрат отрезает от исходного прямоугольного треугольника два меньших прямоугольных треугольника, отношения катетов которых равны отношению катетов данного треугольника: $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{b-x} = \frac{a}{b}$. Поэтому $x = \frac{ab}{a+b}$.

**3.** Может. Например, $88^2 = 7744$.

Четырехзначное число вида $\overline{aabb}$ равно $1100a + 11b = 11(100a + b)$. Целое число, квадратом которого оно является, делится на 11. Квадраты чисел 11, 22 – трехзначные числа. Возводя в квадрат 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, убеждаемся, что $88^2 = 7744$. Квадрат следующего за 99 числа, кратного 11, – пятизначное число.

**4.** За шесть ходов.

При каждом ходе шахматный конь перемещается и в горизонтальном и в вертикальном направлениях не более чем на две клетки. Поэтому из клетки a1 на клетку h8 конь не может попасть менее чем за четыре хода. С другой стороны, легко указать, как за шесть ходов конь может пройти из левой нижней клетки в правую верхнюю клетку доски, перемещаясь, например, по клеткам a1, b3, d4, f5, e7, g6, h8.

При каждом ходе конь перемещается на клетку другого цвета, поэтому, чтобы перейти из клетки a1 на клетку h8 того же цвета, потребуется четное число ходов.
Докажем, что за четыре хода конь не может переместиться из клетки a1 на клетку h8.
Обозначим через $x_i$ количество клеток, на которые конь переместился за $i$-й ход в горизонтальном направлении, через $y_i$ – количество клеток, на которые конь переместился в вертикальном направлении, считая $x_i$ и $y_i$ положительными, если перемещение произошло, соответственно, направо или вверх, и отрицательными, если перемещение произошло налево или вниз. При этом $|x_i|+|y_i|=3$. Чтобы конь за четыре хода добрался из клетки a1 до клетки h8, должны выполняться такие равенства: $1+x_1+x_2+x_3+x_4=8$, $1+y_1+y_2+y_3+y_4=8$. Воспользовавшись неравенством для модуля суммы, получим, что $1+|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|\ge 8$, $1+|y_1|+|y_2|+|y_3|+|y_4|\ge 8$. Сложив последние неравенства, получим, что $2+3+3+3+3\ge 16$, чего не может быть.

**5.** Обозначим площадь треугольника $ABC$ через $S$, тогда площади треугольников $C_1AC$, $B_1CB$, $A_1BA$ равны $\frac{1}{3}S$. Однако справедливо равенство (рис.14)

$$S_{C_1AC}+S_{A_1BA}+S_{B_1CB}+S_{A_2B_2C_2}=S+S_{A_2B_1C}+S_{B_2C_1A}+S_{C_2A_1B},$$

поскольку площади закрашенных треугольников $A_2B_1C$,

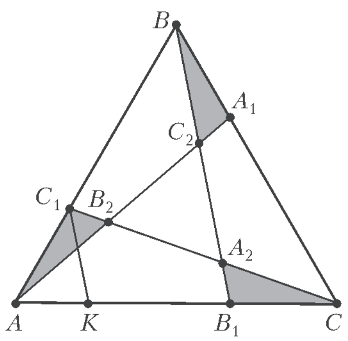


*Рис. 14*

$B_2C_1A$ и $C_2A_1B$ считаются дважды. Следовательно,

$$S_{A_2B_2C_2}=S_{A_2B_1C}+S_{B_2C_1A}+S_{C_2A_1B}.$$

Найдем площадь треугольника $A_2B_1C$. Через точку $C_1$ проведем прямую, параллельную $BB_1$. Пусть эта прямая пересекает $AC$ в точке $K$. Тогда $B_1C=\frac{3}{9}AC$, $AK=\frac{1}{3}AB_1=\frac{1}{9}AC$, $KC=\frac{7}{9}AC$. Треугольники $C_1AC$ и $C_1KC$ имеют одинаковые высоты, поэтому $S_{C_1KC}=\frac{7}{9}S_{C_1AC}=\frac{7}{27}S$. Площади подобных треугольников $ABC$ и $C_1KC$ относятся как квадраты соответственных сторон, $B_1C:KC=3:7$, поэтому

$$S_{A_2B_1C}=\frac{9}{49}S_{C_1KC}=\frac{9}{49}\cdot\frac{7}{27}S=\frac{1}{21}S.$$

Площади закрашенных треугольников равны между собой, сумма их площадей равна $\frac{1}{7}S$.
Отметим, что при решении не использовалось то, что исходный треугольник – правильный. Если взять произвольный треугольник $ABC$, то отношение площади треугольника $A_2B_2C_2$ к площади треугольника также равно $\frac{1}{7}$.

**6.** 6 и 102.
Поскольку $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{5\frac{2}{3}}$, то $m>5\frac{2}{3}$. Предположим теперь, что $m<n$. Тогда $\frac{2}{11\frac{1}{3}}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}<\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{2}{m}$. Поэтому $m<11\frac{1}{3}$. Перебирая натуральные числа $m$, равные 6, 7, 8, 9, 10 и 11, убедимся в том, что подойдет только $m=6$.

*Штрафные задачи*

**Ш1**. 360.
Обозначим через $n$ число сторон правильного многоугольника. Взяв произвольную вершину многоугольника, соединим ее диагоналями со всеми остальными вершинами, не являющимися соседними с выбранной вершиной. Тем самым, многоугольник разобьется на $n-2$ треугольника. Сумма углов многоугольника равна сумме углов полученных треугольников: $n\cdot 180^\circ=(n-2)\cdot 179^\circ$.

**Ш2.** Четыре.
В квадрате площадью 9 нельзя разместить более четырех квадратов площадью 2. А четыре квадрата – можно: разрежем квадрат со стороной 3 на четыре равных квадрата со стороной 1,5, в каждый из которых можно поместить квадрат со стороной $\sqrt{2}$, так как $\sqrt{2}<1{,}5$.

**Ш3.** Шесть.
Нужно найти все пары натуральных чисел, произведение которых равно 72:

$$1\cdot 72,\ 2\cdot 36,\ 3\cdot 24,\ 4\cdot 18,\ 6\cdot 12,\ 8\cdot 9.$$

**Ш4.** $1906\frac{1}{2}$.
Расстояние между числами $a$ и $b$ равно $|a-b|$, поэтому нужно найти середину отрезка $[1799; 2014]$, т.е. число

$$1799+\frac{2014-1799}{2}=1906\frac{1}{2}.$$

**Ш5.** $S_{AMD}=S_{ALD}-S_{MLD}$, $S_{CLMK}=S_{KCD}-S_{MLD}$. Но $S_{ALD}=S_{KCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

**Ш6.** Соединив прямой вершину $A$ угла с данной внутри угла точкой $M$, возьмем на этой прямой такую точку $B$, что $AM=MB$. Проведя через точку $B$ прямые, параллельные сторонам угла, получим параллелограмм, одной диагональю которого является отрезок $AB$, а другой диагональю – искомый отрезок, делящийся точкой $M$ пополам.

*Письменный индивидуальный тур*

*5–6 классы*

**1.** Шаг Гулливера длиннее шага лилипута в 12 раз.
Сумма шагов Гулливера и лилипута в два раза больше количества шагов Гулливера и в 6 раз меньше количества шагов лилипута на всем пути между указанными населенными пунктами. Значит, чтобы пройти весь путь, лилипуту потребуется в 12 раз больше шагов, чем Гулливеру.

**2.** 22.
Из трех последовательных натуральных чисел на 5 может делиться только одно. Поэтому в произведении $(n+1)(n+2)(n+3)$ один из трех сомножителей должен делиться на 25. Легко проверить, что если $n=22$, то произведение делится и на 4.

**3.** 4 рубля 80 копеек.
Хозяин обещал, что каждый месяц работнику будет причитаться по одному рублю и одной двенадцатой стоимости кафтана. За 7 отработанных месяцев работник должен был получить семь рублей и семь двенадцатых стоимости кафтана, но при расчете он получил 5 рублей и кафтан. Значит, 2 рубля стоят пять двенадцатых стоимости кафтана, откуда пять каф-

танов стоят 24 рубля, а один кафтан – 4 рубля 80 копеек.

**4.** Точку $M$ нужно взять на одну клеточку ниже точки $C$. Площадь четырехугольника $ABCD$ равна площади 25 – 5 = = 20 клеточек, значит, площадь треугольника $AMD$ должна равняться 10. Но площадь этого треугольника равна половине площади прямоугольника со сторонами $AD$ и $MD$. Поэтому точку $M$ нужно взять на четыре клеточки выше точки $D$.

**5.** Рассмотрим на плоскости две перпендикулярные прямые, причем одна из них расположена горизонтально, а другая – вертикально. Можно считать, что все из 20 отмеченных точек лежат правее вертикальной прямой и выше горизонтальной. Начнем двигать вертикальную прямую, не меняя ее направления, направо, пока на ней не окажется одна или несколько из отмеченных точек.

Если на вертикальной прямой лежит четное число отмеченных точек, то, двигаясь сверху вниз, соединим попарно первую точку со второй, третью – с четвертой и т.д. После этого продолжим перемещать вертикальную прямую, не меняя ее направления, вправо, пока на ней вновь не окажется одна или несколько из отмеченных точек.

Если на вертикальной прямой лежит нечетное число отмеченных точек, то, двигаясь сверху вниз, соединим попарно первую точку со второй, третью – с четвертой и т.д.; самую нижнюю (оставшуюся без пары) точку соединим с самой нижней точкой из тех отмеченных точек, которые встретит вертикальная прямая при дальнейшем перемещении направо. В случае если на новой вертикальной прямой остались еще какие-то отмеченные точки, то соединяем их, как и раньше, в соответствии с тем, четное их число или нечетное.

После того, как вертикальная прямая в своем движении направо пройдет все отмеченные точки, они окажутся соединенными попарно непересекающимися отрезками.

Другое решение приведено к аналогичной задаче 5 индивидуального тура 7–8 классов.

### 7–8 классы

**1.** Улов Алика больше улова Бори в 2 раза.

Пусть улов Алика составляет $a$ рыб, улов Бори – $b$ рыб. Чтобы уравнять уловы, Алик отдал Боре половину разности между их уловами, т.е. $\frac{a-b}{2}$ рыб. Если бы такое же количество рыб Боря отдал Алику, то у Бори оказалось бы $b-\frac{a-b}{2}=\frac{3b-a}{2}$ рыб, у Алика $a+\frac{a-b}{2}=\frac{3a-b}{2}$ рыб, и по условию задачи выполнялось бы соотношение $5\cdot\frac{3b-a}{2}=\frac{3a-b}{2}$, из которого следует, что $15b-5a=3a-b$, или $16b=8a$.

**2.** В 10 часов $5\frac{5}{11}$ минут, в 10 часов $38\frac{2}{11}$ минут.

В момент, когда часы показывают 10 часов, угол между минутной и часовой стрелками часов составляет 60°. Если часовая стрелка за некоторый промежуток времени переместится на угол $x°$, то минутная стрелка за этот же промежуток времени переместится на угол $12x°$. Чтобы угол между стрелками равнялся 90°, число $x$ должно удовлетворять равенству $60-x+12x=90$ или равенству $60-x+12x=270$. Решая два полученных уравнения, находим, что $x=\frac{30}{11}$ или $x=\frac{210}{11}$. Часовая стрелка проходит угол 30° за 60 минут, поэтому часовая и минутная стрелки часов образуют прямой угол через $\frac{60}{11}$ минуты после 10 часов либо через $\frac{420}{11}$ минуты после 10 часов.

**3.** 1:4.

Площадь трапеции равна $\frac{3+5}{2}H$, где $H$ – высота трапеции. Площадь треугольника $AMD$ должна равняться половине площади трапеции, т.е. $2H$. С другой стороны, площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot h$, где $h$ – высота треугольника $AMD$. Поэтому $h:H=2:\frac{5}{2}=4:5$. Но $h:H=MD:CD$.

**4.** 7.

Цифры однозначных и двузначных чисел в указанном ряду занимают места с первого до $9+2\cdot 90=189$ -го места. Но

$$2014-189=1825=608\cdot 3+1,$$

поэтому на 2014-м месте стоит первая цифра 609-го трехзначного числа, т.е. первая цифра числа 708.

**5.** Поскольку на плоскости отмечено конечное число точек, то и прямых, попарно соединяющих эти точки, конечное число. Поэтому найдется прямая $l$, не параллельная ни одной из этих прямых. Можно считать, что все отмеченные точки лежат по одну сторону от прямой $l$. Начнем двигать прямую $l$, не меняя ее направления, в сторону отмеченных точек. При этом она будет последовательно проходить через 1-ю, 2-ю, 3-ю, 4-ю, ..., 2013-ю, 2014-ю точки. Отрезок, соединяющий $(2k-1)$-ю и $2k$-ю точки ($k$ = 1, 2, ..., 1007), лежит в $k$-й полоске со сторонами, параллельными прямой $l$, и все эти 1007 полосок не пересекаются.

Другое решение приведено к аналогичной задаче 5 индивидуального тура для 5–6 классов.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

С.А.Дориченко, А.А.Егоров, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь

www.Pareto-print.ru

# ЭпохА БОРИСА СПАССКОГО

Продолжаем наш рассказ о лучших шахматных партиях за полвека (см. «Квант» №2) и вновь приглашаем вас посетить выставку 50 партий-лауреатов за 1966–2015 годы. Сегодня на очереди пять партий.

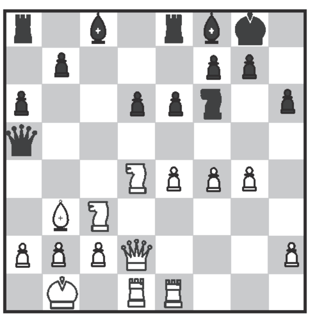
**Б.Спасский–Т.Петросян**

**Матч на первенство мира,**
**19-я партия**
**Москва, 1969**
**Сицилианская защита**

После этой эффектной победы на финише стало ясно, что мир получает нового короля – Бориса Спасского.

**1. e4 c5 2. ♘f3 d6 3. d4 cd 4. ♘:d4 ♘f6 5. ♘c3 a6 6. ♗g5 ♘bd7 7. ♗c4 ♕a5 8. ♕d2 h6 9. ♗:f6 ♘:f6 10. 0-0-0 e6 11. ♖he1 ♗e7.** Ввиду угрозы g2-g4-g5 черным следовало посредством 11... ♗d7 подготовить рокировку.

**12. f4 0-0 13. ♗b3 ♖e8 14. ♔b1 ♗f8 15. g4! ♘:g4.** Ясно, что и при отклонении жертвы черные не устояли бы. **16. ♕g2 ♘f6 17. ♖g1 ♗d7 18. f5! ♔h8 19. ♖df1 ♕d8 20. fe fe.**



**21. e5! de 22. ♘e4! ♘h5 23. ♕g6! ed.** Другой симпатичный эпилог – 23... ♘f4 24. ♖:f4! ef 25. ♘f3 ♕b6 26. ♖g5!! ♗c6 27. ♘f6.

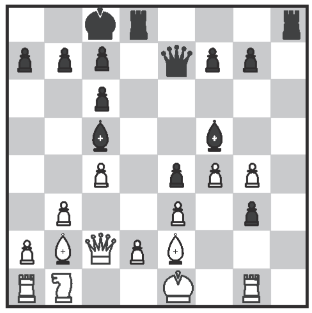
**24. ♘g5! Черные сдались.**

**Б.Ларсен – Б.Спасский**
**Белград, 1970**
**Английское начало**

Победа Спасского в «матче века» (сборная СССР – сборная мира) – весьма яркое произведение.

**1. b3 e5 2. ♗b2 ♘c6 3. c4 ♘f6 4. ♘f3 e4 5. ♘d4 ♗c5 6. ♘:c6 dc 7. e3 ♗f5 8. ♕c2 ♕e7 9. ♗e2 0-0-0 10. f4.** Датчанин славился как любитель дебютных экспериментов, спокойнее 10. ♘c3. **10...♘g4! 11. g3.** На 11. ♘c3 уже решало 11... ♖:d2! 12. ♕:d2 ♗:e3. Короткая рокировка невозможна – 11. 0-0 ♕h4 12. h3 h5 и 13... ♕g3, и белым остается пожалеть, что они чрезмерно ослабили пешку e3.

**11...h5 12. h3.** На 12. ♘c3 вновь следовал удар 12... ♖:d2!



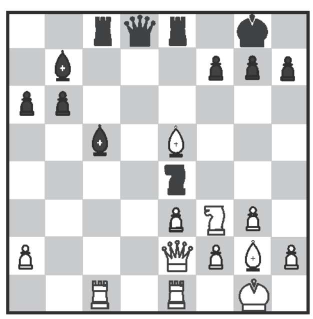
**12...h4! 13. hg hg 14. ♖g1.**

**14... ♖h1!** Сразу два тактических приема, основанных на шахматной геометрии – отвлечение и завлечение. **15. ♖:h1 g2 16. ♖f1.** Не помогает 16. ♖g1 ♕h4+ 17. ♔d1 ♕h1 18. ♕c3 ♕:g1+ 19. ♔c2 ♕f2 20. gf ♕:e2 21. ♘a3 ♗b4. **16...♕h4+! 17. ♔d1 gf♕+. Белые сдались.**

**В.Ульман – В.Смыслов**
**Москва, 1971**
**Новоиндийская защита**

**1. c4 ♘f6 2. ♘c3 e6 3. ♘f3 b6 4. g3 ♗b7 5. ♗g2 ♗e7 6. 0-0 0-0 7. d4 ♘e4 8. ♗d2 d5 9. cd ed 10. ♖c1 ♘d7 11. ♗f4 c5 12. dc ♘:c3 13. bc ♘:c5.** Ульман неуверенно разыграл дебют, и у черных уже отличная игра, тем более что их конь скоро водрузится на e4.

**14. ♗e5 ♖e8 15. ♖e1 ♘e4 16. ♕a4 a6 17. c4 ♗c5 18. e3? dc 19. ♕:c4 ♖c8 20. ♕e2?** Беспечность! Необходимо было 20. ♗h3 ♗d5 21. ♕d3 ♗e6 22. ♕:d8 ♖c:d8 23. ♗:e6 ♖:e6 с ничьей. Теперь же Смыслову удается создать маленький шедевр.



**20... ♘:f2!** Эффектный, хотя и несложный удар, тактические осложнения в пользу черных. **21. ♕:f2 ♗:f3 22. ♗h3.** При 22. ♕:f3 ♖:e5 белые просто оставались без пешки. **22...♖:e5!** Жертва качества ведет к неотразимой атаке. Не так ясно 22... ♖a8 23. ♗:g7!

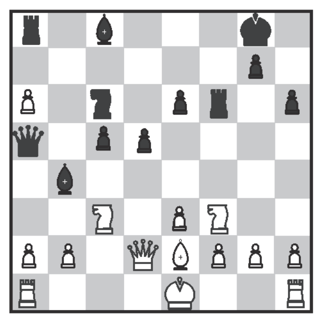
**23. ♗:c8 ♗c6! 24. ♗h3 ♕e8.** Теперь пешка e3 гибнет, рушатся и укрепления белого короля. **25. ♗g2 ♖:e3! 26. ♔h1 ♗:g2+ 27. ♔:g2 ♕e4+ 28. ♔h3 ♕e6+ 29. ♔g2 ♕d5+ 30. ♔h3 ♖e6! Белые сдались.** Эффектный финал: хитро маневрируя, ферзь уступил дорогу ладье.

**Л.Портиш – Б.Ларсен**
**Сан-Антонио, 1972**
**Защита Бенони**

**1. d4 ♘f6 2. c4 c5 3. d5 ed 4. cd d6 5. ♘c3 g6 6. ♘f3 ♗g7 7. ♗f4 ♘f6 8. ♕a4+ ♗d7 9. ♕b3 ♕c7 10. e4 0-0 11. ♗e2 ♘h5 12. ♗e3 ♘a6 13. ♘d2 f5 14. ef gf.** Черные неудачно разыграли дебют, разбросав своих коней. Теперь одного из них они отдают, а когда отыграют, столкнутся с новыми проблемами. **15. ♗:h5 f4 16. 0-0 fe 17. fe ♘b4 18. ♘ce4 a5 19. ♘g5 a4 20. ♕c4 h6 21. ♘e6 ♗:e6 22. de d5 23. ♗f7+ ♔h8 24. ♕h4 ♕e5 25. ♘f3 ♕:e3+ 26. ♔h1 ♘d3.** Кажется, у черных все в порядке, грозит 27...a3, но... **27. ♖ae1! ♘:e1 28. ♖:e1.** Теперь пешка «e» решает дело. **28...♕d3 29. ♕h5 a3 30. b3 ♗c3 31. e7 ♔g7 32. ff♕+ ♖:f8 33. ♗:d5 ♗:e1 34. ♕e5+ ♖f6 35. ♕e7+. Черные сдались.**

**Б.Спасский – М.Таль**
**Таллин, 1973**
**Защита Нимцовича**

**1. d4 ♘f6 2. c4 e6 3. ♘c3 ♗b4 4. ♗g5 h6 5. ♗h4 c5 6. d5 b5 7. de fe 8. cb d5 9. e3 0-0.** За пешку у черных подвижный пешечный центр. **10. ♘f3 ♕a5 11. ♗:f6 ♖:f6 12. ♕d2 a6! 13. ba ♘c6 14. ♗e2.** Безопаснее 14. ♕c1, чтобы на 14...d4 ответить 15. a3 ♗:c3+ 16. bc.



**14...d4!** Прорыв в центре сопровождается жертвой качества. **15. ed ♖:f3! 16. ♗:f3 cd 17. 0-0 dc 18. bc ♗:c3 19. ♕d6 ♖:a6 20. ♗:c6 ♗b4!** Завершение комбинации, слон c6 попался. **21. ♕b8 ♖:c6.** Материальный перевес уже на стороне черных, но им еще предстоит ликвидировать опасности по линии «c». **22. ♖ac1 ♗c5 23. ♖c2 ♕a4 24. ♕b3 ♕f4 25. ♕g3 ♕f5! 26. ♖fc1 ♗b7 27. ♕f3 ♕g5 28. ♕b3 ♖c7 29. g3 ♗:f2+! 30. ♔:f2.** Черные снова без качества, но неприятельскому королю не скрыться. Сейчас сразу выигрывало 30... ♕f5+ 31. ♔g1 ♕e4!

**30... ♕f6+ 31. ♔e1 ♕e5+ 32. ♔f1 ♗a6+ 33. ♔g1 ♕d4+ 34. ♔g2 ♕e4+ 35. ♔g1. ♗b7 36. h4 ♕h1+ 37. ♔f2 ♖f7+ 38. ♔e2 ♕e4+. Белые сдались.**

*Е.Гик*

Индекс 90964

# КАК ЗАКАЛЯЕТСЯ СТАЛЬ?

Ответить на этот вопрос смогут уже семиклассники, как только познакомятся с такими понятиями, как «кристалл» и «диффузия» ...

Прогулки с физикой

(Продолжение – на с. 13 внутри журнала)